Tutorium zur Linearen Algebra I, 6.1.2020

Geg.: K-VR V, $f \in End(V)$ — zu L20/L21

EW/EV: $v \neq 0$ heißt EV von f zum EW $\lambda \in K$, falls $f(v) = \lambda v$ ‖ $v \neq 0$ heißt EV von A zum EW λ, falls $Av = \lambda v$

EW ausrechnen: charakteristisches Polynom: $\chi_A(T) = \det(A - T \cdot I_n)$ ($\dim V = n$)

$\ulcorner$ $\exists v \neq 0 : Av = \lambda v \Leftrightarrow \exists v \neq 0 : (A - \lambda \cdot I_n)v = 0$
$\Leftrightarrow$ LGS $(A - \lambda I_n)v = 0$ hat nichttriv. Lsg.
$\Leftrightarrow rg(A - \lambda I_n) < n$
$\Leftrightarrow \det(A - \lambda I_n) = 0 \Leftrightarrow \chi_A(\lambda) = 0$ $\lrcorner$

<u>Bsp.:</u> $A_0 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ über $K = \mathbb{R}$.

$$\chi_{A_0}(T) = \det(A_0 - T \cdot I_2) = \det\left(\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} - T \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \det\begin{pmatrix} 2-T & -1 \\ 1 & 4-T \end{pmatrix} = (2-T)\cdot(4-T) + 1 = T^2 - 6T + 9 = (T-3)^2$$

EWe = NSt.: $T^2 - 6T + 9 = 0 \Leftrightarrow T_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9-9} = 3$

Fazit: $\lambda = 3$ ist EW der alg. Vielfachheit 2

Eigenraum zu EW λ: $E_\lambda := \ker(A - \lambda I_n)$

Hier: $\lambda = 3$: $E_3 = \ker(A_0 - 3 \cdot I_2) = \ker\left(\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\right)$

$E_3 = \ker\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Bestimme die EV: $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \left\{\begin{matrix} -\xi_1 - \xi_2 = 0 \\ \xi_1 + \xi_2 = 0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \xi_1 = -\xi_2$, ξ_2 Parameter

$$E_3 = \left\{ \begin{pmatrix} -\xi_2 \\ \xi_2 \end{pmatrix} ; \xi_2 \in \mathbb{R} \right\} = L\Big(\underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{ein EV zum EW } \lambda = 3}\Big)$$

Check: $A_0 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-1 \\ -1+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ✓

Bsp: Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 6 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

char. Pol.:

$$\chi_A(T) = \det(A - T\cdot I_4) = \det \begin{pmatrix} 1-T & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-T & 2 & 0 \\ 6 & 0 & 1-T & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1-T \end{pmatrix}$$

$$= (1-T)\cdot \det \begin{pmatrix} 1-T & 2 & 0 \\ 0 & 1-T & 3 \\ 2 & 0 & 1-T \end{pmatrix} - 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 6 & 1-T & 3 \\ 0 & 0 & \underline{\underline{1-T}} \end{pmatrix}$$

$$= (1-T)\cdot \left[(1-T)\cdot(1-T)^2 - 2\cdot(-6) \right] - \left[(1-T)\cdot(-12) \right]$$

$$= (1-T)\cdot\left((1-T)^3 + 12 + 12 \right)$$

$$= (1-T)\cdot\big(\underbrace{(1-T)^3 + 24}_{\text{Nst.?}} \big)$$

$$\underbrace{(1-T)}^3 = -24 \quad \leftarrow \text{reelle Lsg!}$$

$f(x) = (1-x)^3 + 24$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\rightsquigarrow \underbrace{1 - T_0 = -\sqrt[3]{24}}$ oder ...

$T_0 = 1 + \sqrt[3]{24}$

$p(T) = (1-T)^3 + 24 = \ldots$

$p(T) = (T - 1 - \sqrt[3]{24})\cdot(T^2 \ldots)$

EWe: $\underbrace{\lambda_1 = 1}_{\in \mathbb{Z}}$, $\underbrace{\lambda_2 = 1 + \sqrt[3]{24}}_{\in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}}$, $\lambda_3 = (1+\sqrt[3]{24})\cdot\zeta_3$

$\underbrace{\lambda_4 = (1+\sqrt[3]{24})\cdot\zeta_3^2}_{\text{komplexe Nst, } \notin\mathbb{R}}$, $\zeta_3 = e^{\frac{2\pi i}{3}}$

<u>Bsp.:</u> $A_0 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ über $K = \mathbb{R}$, diagonalisierbar?

$$\chi_{A_0}(T) = (T-3)^{\overset{\uparrow}{2}}{}_{\text{alg. Vielf.} = 2}$$

Geom. Vielfachheit? Per Def.: $\dim E_3 = \dim L\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 1$

Also: geom. Vielf. $= 1 \neq 2 =$ alg. Vielf.

Also: A_0 ist <u>nicht</u> diag'bar! [21.7]

Aber: über $\mathbb{C}$ ist jede Matrix trigonalisierbar,
Aber A_0 ist sogar über $\mathbb{R}$ trigon'bar, denn χ_{A_0} zerfällt über $\mathbb{R}$ in Linearfaktoren [21.13]

E.genraum: $L\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \rightsquigarrow \underbrace{\text{ergänze } \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ zu Basis,}}$
etwa $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

Dann $_{\mathcal{B}}[A_0]_{\mathcal{B}} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ $\triangle$ Matrix,

denn $A_0 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$A_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Bsp.: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

$\rightsquigarrow \chi_A(T) = (2-T)^{\overset{\text{alg. Vielf.} = 2}{2}} \cdot (1-T)$

A ist nicht diag'bar über $\mathbb{R}$! $\underbrace{E_2 = L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)}_{\text{geom. Vielf.} = 1}$, $E_1 = L\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

<u>Aber:</u> $A \in \mathbb{Z}_3^{3\times 3}$ $\mathbb{Z}_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$ $\leftarrow (\bar{2} + \bar{2} = \bar{1})$

$\longrightarrow$ A ist diag'bar über $\mathbb{Z}_3$!

__Beh.:__ Eine $n\times n$-Matrix, in der alle Zeilensummen $= \sigma \in \mathbb{R}$ sind, hat den EW σ zum EV $v = \begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$.

__Bew.:__ Sei A eine solche Matrix, etwa $A = (\alpha_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

$$A\cdot v = A\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\\vdots\\\vdots\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_{11}+\alpha_{12}+\alpha_{13}+\ldots+\alpha_{1n}\\ \alpha_{21}+\alpha_{22}+\ldots+\alpha_{2n}\\ \vdots\\ \alpha_{n1}+\alpha_{n2}+\ldots+\alpha_{nn}\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\sigma\\\sigma\\\vdots\\\sigma\end{pmatrix} = \sigma\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix} = \sigma\cdot v \rightarrow \text{also: } \sigma \text{ ist EW zum EV } v = \begin{pmatrix}1\\\vdots\\1\end{pmatrix}. \quad \square$$

__Bsp.:__ $A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 6 & 0 & 0\\ 7 & -2 & 1\end{pmatrix} \rightarrow$ Zeilensummen $=6 \rightarrow 6$ ist EW, EV ist $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

__Vor.:__ f inv'barer Endo, v ein EV zu EW $\lambda \in K$

__Beh.:__ v ist EV von f^{-1} zum EW $\frac{1}{\lambda}$

__Bew.:__ Laut Vor.: $f(v) = \lambda v$

f^{-1} anwenden: $v = f^{-1}(f(v)) = f^{-1}(\lambda v) = \lambda f^{-1}(v)$

Also: $0 \neq v = \lambda f^{-1}(v)$

Jetzt durch λ teilen: $\frac{1}{\lambda} v = \underline{f^{-1}}(v)$ $\square$

__Beh.:__ f inv'barer Endo $\Leftrightarrow$ 0 kein EW

__Bew.:__ Sei $v \neq 0$ EV zum EW $\lambda = 0$, d.h. $f(v) = 0\cdot v = 0$
$\Leftrightarrow \ker f \neq \{0\} \Leftrightarrow f$ nicht injektiv $\Leftrightarrow f$ nicht inv'bar. $\square$

__Bsp.:__ $A = \begin{pmatrix}3 & & & \\ & 1 & & \\ & & \boxed{0} & \\ & & & 2\end{pmatrix} \rightarrow 0$ ist EW $\rightarrow A$ nicht inv'bar

$f^k := \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{k\text{-mal}}$ $\to$ $f^{k+1} = f \circ f^k$

__Vor.:__ v EV von f zum EW λ
__Beh.:__ $\forall k \in \mathbb{N}$: v EV von f^k zum EW λ^k
__Bew.__ (vollst. Ind.): Ind.anf.: $k=1$: Vor. ✓
Ind.schritt: $k \rightsquigarrow k+1$:
Laut Ind.vor.: v EV von f^k zum EW λ^k
Dann: $f^{k+1}(v) = f \circ f^k(v) = f(\underbrace{f^k(v)}_{=\lambda^k v \text{ nach Ind.vor.}}) = f(\lambda^k v)$
$= \lambda^k \cdot \underbrace{f(v)}_{=\lambda v} = \lambda^k \cdot \lambda v = \lambda^{k+1} v.$ □

(Kurz: $f^{k+1}(v) = f(f^k(v)) = f(\lambda^k v) = \lambda^k f(v) = \lambda^{k+1} f(v)$.)

__Vor.:__ v EV von f zum EW λ
__Beh.:__ v EV von $f - \alpha \, id_V$ zum EW $\lambda - \alpha$, $\alpha \in K$
__Bew.:__ Haben $f(v) = \lambda v$.
Dann $(\underline{f - \alpha id_V})(v) = f(v) - \alpha \cdot id_V(v)$
$= f(v) - \alpha v = \lambda v - \alpha v = \underline{(\lambda - \alpha)} v.$
□
