

-1-
Tutorium Lineare Algebra I, 14.10.2019 (zu L1, L2)

Verknüpfungen zweier Aussagen: $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \Rightarrow B$, $A \Leftrightarrow B$
 $\neg A$ $\neg A \vee B$

Beispiele: $A =$ Der Tisch ist rechteckig. w
 $B =$ " " " 1m hoch. w
 $C =$ " " " grün. f
 $D =$ " " " blau. f

$A \wedge B: w$ $A \vee B: w$ $A \Rightarrow B: \neg A \vee B \quad w$
 $A \wedge C: f$ $A \vee C: w$ $A \Rightarrow C: \neg A \vee C \quad f$
 \uparrow
 $A \Leftrightarrow C: f$

$(A \Rightarrow B):$ $A:$ Es regnet. $B:$ Die Straße ist nass.
 $\neg A \vee B$

| A | B | $A \Rightarrow B$ | $\neg B \Rightarrow \neg A$ |
|---|---|-------------------|-----------------------------|
| w | w | w | w |
| w | f | f | f ← |
| f | w | w | w |
| f | f | w | w |

} Wenn die Straße trocken ist, dann regnet es nicht.

$$A \Leftarrow B \Leftrightarrow \neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg(B \Rightarrow A)$$

Es ist nicht so, dass: Wenn die Straße nass ist, dann regnet es.

$$\boxed{A \Rightarrow B}$$

In Münster regnet es oder die Kirchenglocken läuten.
Und wenn beides passiert, dann ist Sonntag.

A: es regnet, B: die Kirchenglocken läuten,
C: es ist Sonntag.

$$(A \vee B) \wedge (A \wedge B \Rightarrow C)$$

Negation: $\neg ((A \vee B) \wedge (A \wedge B \Rightarrow C))$

$$\Leftrightarrow \neg ((A \vee B) \wedge (\neg(A \wedge B) \vee C))$$

$$\Leftrightarrow \neg ((A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee C))$$

$$\Leftrightarrow \neg(A \vee B) \vee \neg(\neg A \vee \neg B \vee C)$$

$$\Leftrightarrow (\underbrace{\neg A \wedge \neg B}_{\substack{\text{es regnet nicht} \\ \text{und die k. läuten} \\ \text{nicht}}} \vee \underbrace{(A \wedge B \wedge \neg C)}_{\substack{\text{es regnet \& die k. läuten} \\ \text{und es ist nicht Sonntag}}})$$

Bsp.: Alle Tische sind grün. $\forall t: G(t)$ f

Negation: $\neg (\forall t: G(t)) \Leftrightarrow \exists t: \neg G(t)$

\Leftrightarrow Es gibt einen Tisch, der ist nicht grün. w

-3-

$$\neg (\forall t \exists d : P(t, d))$$

$$\Leftrightarrow \exists t : \neg (\exists d : P(t, d))$$

$$\Leftrightarrow \exists t \forall d : \neg P(t, d)$$

$$\exists! t : P(t) \Leftrightarrow \exists t : P(t) \wedge (P(t) \wedge P(t') \Rightarrow t=t')$$

$$\neg (\exists x : P(x)) \Leftrightarrow \forall x : \neg P(x)$$

$$\text{Kein } x \text{ erfüllt } P(x) \Leftrightarrow \neg (\exists x : P(x))$$

$$\neg (\forall x : P(x)) \Leftrightarrow \exists x : \neg P(x)$$

$$\text{Nicht-Jedes } x \text{ erfüllt } P(x) \Leftrightarrow \text{Es gibt ein } x \text{ mit } \neg P(x)$$

$$\exists! t : P(t) \Leftrightarrow \exists t : P(t) \wedge (P(t) \wedge P(t') \Rightarrow t=t')$$

Negation: $\neg (\exists t : P(t)) \vee \neg (\underbrace{P(t)}_A \wedge \underbrace{P(t')}_B \Rightarrow t=t')$

$\Leftrightarrow \forall t : \neg P(t) \vee (P(t) \wedge P(t') \wedge \neg(t=t'))$

$\Leftrightarrow \forall t : \neg P(t) \vee (P(t) \wedge P(t') \wedge t \neq t')$

VR: $\neg (A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg (\neg A \vee B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B$ (*)

$\forall x : x > 2 \Rightarrow x^2 > 4$

| | | |
|-----------------------------|--|---------------------------------|
| $\neg(A \Leftrightarrow B)$ | $x+2=y \Leftrightarrow x=y-2$ | $A \Leftrightarrow B$ |
| | $2+2=4 \Leftrightarrow 2=4-2 \checkmark$ | |
| bzw. | $x+2 \neq y \Leftrightarrow x \neq y-2$ | $\neg A \Leftrightarrow \neg B$ |
| | $2+2 \neq 4 \Leftrightarrow 2 \neq 2-2 \quad \text{w}$ | |

$\neg (\forall x : x > 2 \Rightarrow x^2 > 4)$

$\Leftrightarrow \exists x : \neg (x > 2 \Rightarrow x^2 > 4)$

$\Leftrightarrow \exists x : x > 2 \wedge \neg (x^2 > 4)$

$\Leftrightarrow \exists x : x > 2 \wedge x^2 \leq 4$

$x^2 \leq 4 \Leftrightarrow x^2 < 4 \vee x^2 = 4$