Tutorium zur Linearen Algebra I, 16.12.2019

Zu L17: Basiswechsel

$A, B \in K^{m \times n}$ äquivalent $\Leftrightarrow \exists R \in K^{m \times m}$, $S \in K^{n \times n}$ invertierbar: $B = R^{-1} A S$ ← Basiswechselmatrizen

Satz 16.19: A äqu. zu $\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$, $r = rg(A)$

Bsp.: um R, S aufzustellen, so dass Rangform $\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$ erreicht wird:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3} \text{ hat Rang } 2 = r$$

$\rightsquigarrow$ Rangform: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Gesucht: $R \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $S \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ inv'bar mit $\underline{\underline{R^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}}$

Laut Bew.: $S = {}_{\mathcal{E}}[id_{K^n}]_{\mathcal{B}}$ $\rightsquigarrow$ Spalten von S sind die Vektoren aus $\mathcal{B}$

$R^{-1} = {}_{\mathcal{C}}[id_{K^m}]_{\tilde{\mathcal{E}}}$ $\rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow R = {}_{\tilde{\mathcal{E}}}[id]_{\mathcal{C}}$ → Spalten von R sind die Vektoren aus $\mathcal{C}$

Konstruktion von $\mathcal{B}, \mathcal{C}$:

$\underbrace{(u_1, \dots, u_s) \text{ als Basis von } \ker A \text{ und } (u_{s+1}, \dots, u_n)}_{\to \mathcal{B}}$ so, dass $\underbrace{Au_{s+1}, \dots, Au_n \text{ Basis von } \operatorname{im} A}_{\rightsquigarrow \mathcal{C}}$

Was ist $\ker A$? $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\rightsquigarrow$ hier $u_1 = \begin{pmatrix} -10 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \in \ker A$

$(\underbrace{rg A}_{2} + \dim \ker A = 3 \Rightarrow \dim \ker A = 1)$

Antwort: $\ker A = L(u_1) = L\begin{pmatrix} -10 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Hier: $\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$ $\rightsquigarrow R = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \det R = 4$

$\rightarrow R^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

stelle S auf: $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -10 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ $\rightarrow u_3 \in \ker A$

$\rightarrow u_1 = e_1,\ u_2 = e_2$

$\rightsquigarrow Au_1, Au_2$ sind Basis von im A

$$R^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} S = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -10 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -10 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5/2 \\ 0 & 1 & 1/4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -10 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -10+0+\frac{5}{2}\cdot 4 \\ 0 & 1 & -1+\frac{1}{4}\cdot 4 \end{pmatrix} = (\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}_{I_2}\ \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}) \checkmark$$

---

für Endomorphismen: $f: \underset{\mathcal{B}}{V} \to \underset{\mathcal{B}}{V}$ linear, $\dim V = n$

$\rightsquigarrow A, B$ ähnlich $\Leftrightarrow \exists\, S \in K^{n \times n}$, invertierbar: $B = S^{-1} A S$

$A, B \in K^{n \times n}$

$\Leftrightarrow A = S B S^{-1}$

$\Leftrightarrow A = (S^{-1})^{-1} B \cdot S^{-1}$

-3-

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E} \subseteq K^n \arrow[r, "A", "f_A"'] \arrow[d] & K^n \supseteq \mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n) \arrow[d] \\
\mathcal{B} \subseteq K^n \arrow[r, dashed, "B"'] & K^n \supseteq \mathcal{B}
\end{tikzcd}$$

wobei
$$\begin{aligned} B &= {}_{\mathcal{B}}[f_A]_{\mathcal{B}} \\ &= {}_{\mathcal{B}}[id_{K^n} \circ f_A \circ id_{K^n}]_{\mathcal{B}} \\ &= \underbrace{{}_{\mathcal{B}}[id]_{\mathcal{E}}}_{S^{-1}} \cdot \underbrace{{}_{\mathcal{E}}[f_A]_{\mathcal{E}}}_{A} \cdot \underbrace{{}_{\mathcal{E}}[id]_{\mathcal{B}}}_{S} \end{aligned}$$

$\Rightarrow A, B$ ähnlich ✓

L18 / L19:

Determinantenfunktion: $\Delta : (K^n)^n \longrightarrow K$

(n-) multilin. $\Leftrightarrow$ $\Delta(\dots, \alpha x_i + \beta x_i', \dots) = \alpha \Delta(\dots, x_i, \dots) + \beta \Delta(\dots x_i' \dots)$

alternierend $\Leftrightarrow$ $(x_1, \dots, x_n \in K^n$ lin. unabh. $\Rightarrow \Delta(x_1, \dots, x_n) = 0)$

Δ normiert $\Leftrightarrow$ $\Delta(e_1, \dots, e_n) = 1$

L18: $\exists!$ normierte Det. fkt. Δ

L19: $\det A := \Delta(Ae_1, Ae_2, \dots, Ae_n)$ für $A \in K^{n \times n}$

Laplace-Entwicklung $\rightarrow$ $\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \alpha_{ij} \det A_{ij}$,
nach Zeile i

nach Spalte j: $= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \alpha_{ij} \det A_{ij}$.

Vereinfachtes Gauß-Verfahren, um det A zu berechnen.

$$\det\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 5 \\ \underline{2} & \underline{4} & \underline{6} & \underline{10} \\ -1 & 3 & 0 & -8 \\ 1 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Linearität} \\ \text{in Zeile 2}}}{=} 2\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & 0 & -8 \\ 1 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow a_1 \\ \leftarrow a_2 \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\parallel$$

$$2\det\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 10 \\ -1 & 3 & 0 & -8 \\ 1 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} \qquad = \underset{\uparrow}{-}2\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 0 & -8 \\ 1 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} +$$

$$= -2\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 5 \\ 0 & -5 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -8 \\ 1 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} + \begin{matrix} \leftarrow a_1 \\ \leftarrow a_1 - a_2 \end{matrix} = -2\det\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 5 \\ 0 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \\ 1 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$= +2\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 5 \\ 0 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \\ -1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix} + \quad = 2\det\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 5 \\ 0 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= 2\cdot(-1)^{1+1}\cdot\det\begin{pmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \leftarrow \text{Entwickle nach Zeile 1}$$

$$= 2\cdot\left((-1)^{1+1}\cdot(-5)\cdot\det\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + (-1)^{1+2}\cdot 1\cdot\det\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}\right)$$

$$= 2\cdot\Big((-5)\cdot\big(4\cdot(-1) - 2\cdot(-3)\big) - \big(0\cdot(-1) - (-3)\cdot(-3)\big)\Big)$$

$$= 2\cdot(-5\cdot 2 + 9) = \underline{\underline{-2}}$$

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & + & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots & \\ + & - & \cdots & & & \\ \vdots & \vdots & & & & \end{pmatrix} \qquad (-1)^{i+j} = \begin{cases} 1, & i+j \text{ gerade} \\ -1, & i+j \text{ ungerade} \end{cases}$$

-5-

$$\det\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \cdots & a_2 & 0 \\ 0 & \cdots & 0\; a_3 & 0 & 0 \\ a_n & a_{n-1} & 0 & & 0 \end{pmatrix}}_{A_n(a_1,\dots,a_n)} = (-1)^{n+1} \cancel{A} \cdot a_1 \cdot \det \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \cdots 0 & a_2 \\ 0 & \\ a_n & 0 \end{pmatrix}}_{A_{n-1}(a_2,\dots,a_n)}$$

Ind.schritt ?

Vertausche Spalten: n-te Spalte $\rightsquigarrow$ 1. Stelle $\rightsquigarrow (-1)^{n-1}$

$(n-1)$-te Spalte $\to$ 2. Stelle $\rightsquigarrow (-1)^{n-2}$

$\vdots$ $\quad\vdots \to$ aufhören bei

1.te Spalte $\to$ n. Stelle $\quad (-1)^{n-\frac{n}{2}}$ $\frac{n}{2}$ bzw. $\frac{n-1}{2}$

$= (-1)^{n/2}$?

$$\det\begin{pmatrix} & & a_1 \\ & \cdot & \\ a_n & & \end{pmatrix} = (-1)^{\underbrace{(n-1)+(n-2)+\dots+\left(\frac{n}{2}\right)}_{\frac{n(n-1)}{2}}} ? \det\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}$$

~~bzw. $(-1)^{\frac{n}{2}+\frac{n}{2}-1+\dots+} \det\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n\end{pmatrix}$~~ ?

$\overset{?}{=} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$?

$$\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}$$

$n=2$: $\det\begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ a_2 & 0 \end{pmatrix} = -a_1 a_2 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_1 a_2$

$n=3$: $\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1 \\ 0 & a_2 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = +a_1 \underbrace{\det\begin{pmatrix} 0 & a_2 \\ a_3 & 0 \end{pmatrix}}_{-a_2 a_3} = \underbrace{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}_{-1} a_1 a_2 a_3$ ✓

✓

$\vdots$

Beh.: $\det\begin{pmatrix} & & a_1 \\ & a_2 & \\ a_n & & \end{pmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_1 a_2 \cdots a_3$

Bew.: Vollst. Ind.: $n=1$ ✓

Ind. Schritt: $n-1 \to n$:

$$\det A_n = (-1)^{n+1} a_1 \underbrace{\det A_{n-1}(a_2,\ldots,a_n)}_{\overset{\text{Ind.Vor.}}{=} (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \cdot a_2 \cdots a_n}$$

$$= (-1)^{n+1+\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \underline{a_1 \cdots a_n}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_1 \cdots a_n$$

Zeige noch: $\overbrace{n+1+\frac{(n-1)(n-2)}{2}}^{\frac{2n+2+n(n-1)-2(n-1)}{2}} \equiv \frac{n(n-1)}{2} \ (2)$ ✓

□