# Tutorium zur Linearen Algebra I, 9.12.2019

Zu L15:

Sylvester $\rightsquigarrow \mathrm{rg}(g \circ f) \leq \min\{\mathrm{rg}(g), \mathrm{rg}(f)\}$

$$ {}_{\mathcal{D}}[g \circ f]_{\mathcal{B}} = {}_{\mathcal{D}}[g]_{\mathcal{C}} \cdot {}_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{B}} $$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B} \subseteq V \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & W \supseteq \mathcal{C} \arrow[r, "g"] & U \supseteq \mathcal{D} \end{tikzcd}$$

$[f^{-1}] = [f]^{-1}$, falls $f$ Isom.

Denn: $I_n = [\mathrm{id}] = [f \circ f^{-1}] = [f] \cdot [f^{-1}]$

$\Rightarrow [f]^{-1} = [f^{-1}]$

$A = (\alpha_{ij})_{i,j}$

$A^T = (\alpha_{ji})_{i,j}$

Beh.: $(AB)^T = B^T A^T$

Bew.: · An Stelle $(i,k)$ steht in $(AB)^T$ der Eintrag:
$$\left(\sum_j \alpha_{ij}\beta_{jk}\right)^T_{i,k} = \left(\sum_j \alpha_{kj}\beta_{ji}\right)_{i,k}$$

· An Stelle $(i,k)$ steht in $B^T \cdot A^T$ der Eintrag:
$$\left(\sum_j \beta^T_{ij}\, \alpha^T_{jk}\right) = \left(\sum_j \beta_{ji}\, \alpha_{kj}\right)_{i,k}$$

Beh.: $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Bew.:
$$A^T \cdot (A^{-1})^T = (A^{-1} \cdot A)^T = I_n^T = I_n. \quad \square$$

Bsp.: • Drehung um 90° in $\mathbb{R}^2$ (Drehzentrum ist $0$)
Klarmachen: ist eine lineare Abb.

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linear ✓

$\rightsquigarrow$ Matrix $A$

$$\left.\begin{array}{l} f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \\ f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow A = \begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}$$

$$v = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} \rightsquigarrow A \cdot v = \begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix} \rightsquigarrow A^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow A^{-1}$ ist Drehung um $-90°$
bzw $270°$

• Spiegelung an $y = x$: $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linear klar

$$g\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = B$$

selbstinvers

$$g\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

Hintereinander:

• $\underbrace{\text{erst Spieg.}}_{g}$ $\underbrace{\text{dann Dreh}}_{f}$: $f \circ g \to A \cdot B = \begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}}^{\text{Spieg. an y-Achse}}$

• $\underbrace{\text{erst Dreh}}_{f}$, $\underbrace{\text{dann Spieg}}_{g}$: $g \circ f \rightsquigarrow B \cdot A = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}}_{\text{Spieg. an x-Achse}}$

L16:

$A \in K^{m \times n}$, $b \in K^m$

- $Ax = b$ lösbar $\Rightarrow L = \{x \mid Ax = b\} = a + H$

  $\uparrow$ $\llcorner$ UVR des $K^n$ der Dim. $n - rg(A)$ ✓

  $\hookrightarrow$ und $n = rg(A) \Rightarrow \dim H = 0 \Rightarrow L = \{a\}$ Eindeutige Lsg.

- $A$ quadratisch, $m = n$, $\underbrace{n = rg(A)}_{\Rightarrow A \text{ invertierbar}} \Rightarrow$ Eindeutige Lsg. $L = \{A^{-1} b\}$.

$$\ulcorner Ax = b \overset{A^{-1}\cdot}{\Rightarrow} A^{-1} A x = A^{-1} b \Rightarrow x = A^{-1} b \lrcorner$$

---

⚠ Fehlerquelle:

Bsp.: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in K^{3 \times 2}$, $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Aufgabe: Lösungsmenge von $Ax = b$?

Betr. $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, ist Linksinv., d.h. $B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$

Dann $\underline{\underline{x}} = I_2 \cdot x = B \cdot \underbrace{Ax}_{b} \overset{\text{!}}{\underset{\uparrow}{=}} B \cdot b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+12 \\ 3+16 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 14 \\ 19 \end{pmatrix}}}$

Ann. x sei Lösung falsch!

Lösung? Nein: $A \cdot \begin{pmatrix} 14 \\ 19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 14 \\ 19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 19 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Lösungsmenge: $\emptyset$, da $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{array}\right) \leftarrow$ ↯ unerfüllbar.

---

Bsp.: Rangbestimmung mit Gaußelim.: Benutze Zeilen- und Spaltenumformung in einer Rechnung!

Spaltenumformung

- $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \; |\cdot(-1) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \; |\cdot(-1)$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} + \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow rg(A) = 3$

Inverse Matrix

von $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ ?

$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] |\cdot 5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right] |:11$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{11} & \frac{5}{11} \end{array}\right] |\cdot(-1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 & \frac{10}{11} & -\frac{5}{11} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{11} & \frac{5}{11} \end{array}\right] |\cdot(-5)$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{11} & \frac{1}{11} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{11} & \frac{5}{11} \end{array}\right] |\cdot(-2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & \frac{4}{11} & -\frac{2}{11} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{11} & \frac{1}{11} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{11} & \frac{5}{11} \end{array}\right] |\cdot(-4) +$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{11} & \frac{1}{11} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{11} & \frac{5}{11} \end{array}\right]$

$\underbrace{\phantom{xxx}}_{I_3} \quad \underbrace{\phantom{xxx}}_{A^{-1}}$

Also: $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -\frac{2}{11} & \frac{1}{11} \\ 0 & \frac{1}{11} & \frac{5}{11} \end{bmatrix}$.