Tutorium zur Linearen Algebra I, 2.12.2019

<u>Zu L14:</u> Sei $A = (\alpha_{ij}) \in K^{m \times n}$, $B = (\beta_{ij}) \in K^{n \times l}$. Sei $C = A \cdot B$, etwa $C = (\gamma_{ij}) \in K^{m \times l}$.

Dann

$$\underbrace{\gamma_{ij}}_{i\text{-te Zeile}, j\text{-te Spalte}} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} \beta_{kj}.$$

- Zeige: Sei $A \in K^{m \times n}$. Dann $A \cdot I_n = I_m \cdot A = A$.

Beweis: In Zeile i, Spalte j von $A \cdot I_n$ steht

$I_n = (\delta_{ij})$, $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} \underbrace{\delta_{kj}}_{1 \Leftrightarrow k=j} = \alpha_{ij} \cdot 1 = \alpha_{ij} \checkmark$$

Also: $A \cdot I_n = A$. $\square$

- Zeige: $A \cdot e_r = \begin{pmatrix} \alpha_{1r} \\ \alpha_{2r} \\ \vdots \\ \alpha_{mr} \end{pmatrix}$ für alle $r \in \{1, \dots, n\}$, $A \in K^{m \times n}$, $e_r \in K^n = K^{n \times 1}$

Beweis: In Zeile i von $A \cdot e_r$ steht $\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} \underbrace{\delta_{kr}}_{=1, k=r} = \alpha_{ir} \cdot 1 = \alpha_{ir}$, $i = 1, \dots, m$.

$$\rightsquigarrow A \cdot e_r = \begin{pmatrix} \alpha_{1r} \\ \vdots \\ \alpha_{mr} \end{pmatrix}. \quad \square$$

Koordinatenvektor: In VR V betr. Basis $\mathcal{B} = \overbrace{(v_1, \dots, v_n)}^{\text{erklären neue Koo-achsen}}$.

Welche Koordinaten hat $v \in V$ bezüglich $\mathcal{B}$?

Schreibe $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$ mit eindeutig best. $\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_n}_{\text{Koordinaten}} \in K$.

Koordinatenvektor: $K_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = {}_{\mathcal{B}}[v]$

Bsp.: $V = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ mit $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$v = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \iff \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$ LGS: $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \end{array}\right)$

$\iff \dots \iff \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 10/7 \\ 0 & 1 & -8/7 \end{array}\right) \rightsquigarrow K_{\mathcal{B}}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10/7 \\ -8/7 \end{pmatrix}$

- Sei $g: K^n \to K^m$, $x \mapsto g(x)$ linear.
  Dann $g(x) = G \cdot x$ mit $G = (g(e_1) \,\vdots\, g(e_2) \,\vdots\, \dots\, g(e_n))$

Bsp.: $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x-2y \\ -y \\ -3x \end{pmatrix}$ lineare Abb., gesucht G mit $g(x) = G \cdot x$

$$\rightsquigarrow G = (g(e_1) \,\vdots\, g(e_2)) = \left(g\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \,\vdots\, g\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \checkmark$$

Etwa $g\begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10-2\cdot 3 \\ -3 \\ -3\cdot 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -30 \end{pmatrix}$.

Auch: $G \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10-6 \\ -3 \\ -30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -30 \end{pmatrix} \checkmark$

$$\begin{array}{ccccc} v_j & (v_j) = \mathcal{B} \subseteq V & \xrightarrow{\quad f \quad} & W \supseteq \mathcal{C} & f(v_j) \\ \downarrow & \downarrow K_{\mathcal{B}} & & \downarrow K_{\mathcal{C}} & \downarrow \\ e_j & K^n & \dashrightarrow & K^m & K_{\mathcal{C}}(f(v_j)) \end{array}$$

$K_{\mathcal{C}}(f(v_j))$ } Spalten von ${}_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{B}}$

${}_{\mathcal{C}}f_{\mathcal{B}} \rightsquigarrow$ Matrix: ${}_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{B}}$

Bsp.: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $V = \mathbb{R}^2$, $W = \mathbb{R}^3$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x-2y \\ -y \\ -3x \end{pmatrix}$, $\mathcal{B} = (v_1, v_2) = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$

$\mathcal{C} = (w_1, w_2, w_3)$, $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

Berechne ${}_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{B}}$: Spalten sind $K_{\mathcal{C}}(f(v_1))$, $K_{\mathcal{C}}(f(v_2))$.

$$f(v_1) = f\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{LGS}} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$f(v_2) = f\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \lambda_1' \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2' \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3' \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{LGS}} \begin{pmatrix} \lambda_1' \\ \lambda_2' \\ \lambda_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11/3 \\ 3 \\ -10/3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow {}_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_1' \\ \lambda_2 & \lambda_2' \\ \lambda_3 & \lambda_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -11/3 \\ 1 & 3 \\ 2 & -10/3 \end{pmatrix}$$

Formel: $${}_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{B}} \cdot \overbrace{{}_{\mathcal{B}}[v]}^{K_{\mathcal{B}}(v)} = \overbrace{{}_{\mathcal{C}}[f(v)]}^{K_{\mathcal{C}}(f(v))}$$

- $v = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow {}_{\mathcal{B}}[v] = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$ in $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \lambda_1 = \frac{33}{7}, \ \lambda_2 = -\frac{4}{7}$$

Also: ${}_{\mathcal{B}}[v] = \begin{pmatrix} 33/7 \\ -4/7 \end{pmatrix}$

- Jetzt $f(v) = A \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -30 \end{pmatrix} \rightsquigarrow {}_{\mathcal{C}}[f(v)] = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -30 \end{pmatrix} = \mu_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_3 \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -22/3 \\ 3 \\ 34/3 \end{pmatrix}}}$$

Basisvektoren von $\mathcal{C}$

Auch: ${}_{\mathcal{C}}[A]_{\mathcal{B}} \cdot {}_{\mathcal{B}}[v] = \begin{pmatrix} -2 & -11/3 \\ 1 & 3 \\ 2 & -10/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 33/7 \\ -4/7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -22/3 \\ 3 \\ 34/3 \end{pmatrix}$ ✓
