Tutorium zur Linearen Algebra I, 25.11.2019, zu Kapitel L12 / L13

zu L12:

$V = \mathbb{R}[T]$ $\mathbb{R}$-VR der Polynome

$(1, T, T^2, T^3, \dots)$ lin. unabh. über $\mathbb{R}$

$\lceil 0 = \sum \alpha_i T^i \Leftrightarrow \alpha_i = 0$ für alle $i \rfloor$

$\rightsquigarrow \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[T] = \infty.$

Sei $U \subseteq V$, $U = \{\alpha_0 + \alpha_1 T + \alpha_2 T^2 ;\ \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}$ alle Polynome vom Grad ≤ 2

$\mathbb{R}^3 \leftarrow$ $(1, T, T^2)$ bilden Basis von U

$\lceil$ lin. unabh. ✓, erzeugend: $U = L(1, T, T^2)$ ✓
$= \{\alpha_0 + \alpha_1 T + \alpha_2 T^2 ;\ \alpha_i \in \mathbb{R}\} \rfloor$

Also $\dim_{\mathbb{R}} U = 3$.

L12: $U_1, U_2 \subseteq V$ UVRe von V.

Summe: $U_1 + U_2 = \{u_1 + u_2 ;\ u_1 \in U_1,\ u_2 \in U_2\}$

direkte Summe: $U_1 \oplus U_2 = U_1 + U_2$ mit $U_1 \cap U_2 = \{0\}$

Dimensionsformel: $\dim V = \dim U_1 + \dim U_2 - \underline{\dim(U_1 \cap U_2)}$,
falls $V = U_1 + U_2$.

Konkretes Bsp.: $V = \mathbb{R}^4$, zerlege V in zwei UVR so, dass $V = U_1 \oplus U_2$.

$\to 4 = \dim V = \dim U_1 + \dim U_2$.

Möchten Zerlegung mit $\dim U_1 = 2 \rightsquigarrow \dim U_2 = 4 - 2 = 2$.

Etwa $U_1 = L\Bigg(\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}}_{\text{lin. unabh.}}\Bigg)$, $U_2 = L\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$ $\to$ die 4 Vektoren sind lin. unabh., also Basis des $\mathbb{R}^4$

$\to$ ergänzen zu Basis des $\mathbb{R}^4$

$\to V = U_1 \oplus U_2$

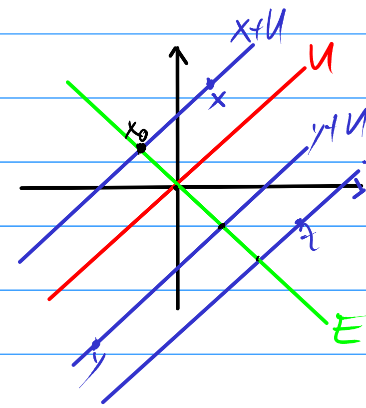
Beh.: $U_1 = L(\mathcal{B})$, $U_2 = L(\mathcal{C})$, $V = U_1 + U_2$ und $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ lin. unabh.
Dann: $V = U_1 \oplus U_2$, d.h. $U_1 \cap U_2 = \{0\}$.

Bew.: Sei $v \in U_1 \cap U_2$. Dann: $v = \sum_i \lambda_i b_i = \sum_j \mu_j c_j$.

Also $\sum \lambda_i b_i + \sum (-\mu_j) c_j = 0$, damit folgt: alle $\lambda_i = 0$, alle $\mu_j = 0$ (da $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ lin. unabh.).

Somit $v = 0$. $\square$

Quot. VR: V ein VR, U ein UVR.
$\hookrightarrow V/U = \{x + U;\ x \in V\}$



Bsp.: $V = \mathbb{R}^3$, $U = L\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right) \subseteq V$.

Hier: $V/U = \{ \underbrace{x+U}_{\text{Geraden, die zu } U \text{ parallel sind und durch } x \text{ gehen}};\ x \in V \}$

Sei $E := \underbrace{L\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)}_{\text{so, dass}}$ $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ lin. unabh.

- Es gilt: jedes $x+U$ durchstößt E in einem Punkt $x_0 \in E$, d.h. $x + U = x_0 + U$, wo $x_0 = \alpha \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

also ist $\underline{x+U} = \alpha \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + U = \alpha \cdot \left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + U\right) + \beta \cdot \left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + U\right)$

$\in L\Big(\underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + U}_{\in V/U}, \underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + U}_{\in V/U}\Big)$

Also: $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + U$, $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + U$ erzeugen V/U

In V/U sind $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+U$, $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+U$ lin. unabh.

⌜ $0+U = \alpha\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+U \iff \alpha\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\in U \iff \alpha=\beta=0$ ⌟

Haben Basis $\underbrace{\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+U,\ \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+U\right)}_{2 \text{ Vektoren}}$ von V/U

Also: $\dim V/U = 2$.

→ Haben: $V/U \cong \mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+U \mapsto e_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+U\mapsto e_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

Sei V VR, $U_1, U_2 \subseteq V$ UVRe, $a,b\in V$.

Def.: $a+U_1 \parallel b+U_2 :\iff U_1\subseteq U_2$ oder $U_1\supseteq U_2$

Beh.: "$\parallel$" ist keine Ä-Rel.

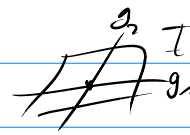
Bew.: reflexiv ✓, symmetrisch ✓

Transitivität gilt i.a. nicht:

$a+U_1$, $c+U_3$ seien Geraden in einer Ebene $b+U_2$, die genau einen Schnittpunkt haben.

Dann: $a+U_1 \parallel b+U_2$ und $b+U_2 \parallel c+U_3$.

Aber: $a+U_1 \nparallel c+U_3$.



$g_1 \nparallel g_2$

□

Beschränkt man sich auf UVRe gleicher Dimension, ist "$\parallel$" eine Ä-Rel.

L13: Lin. Abb.: $f: V\to W$,

wo $f(\alpha v)=\alpha f(v)$, $f(v+w)=f(v)+f(w)$, $\forall v,w\in V, \alpha\in K$,

Beh.: Abb. $f:V\to W$ linear $\iff \forall \alpha,\beta\in K\ \forall v_1,v_2\in V$: $f(\alpha v_1+\beta v_2)=\alpha f(v_1)+\beta f(v_2)$.

Bew.: „$\Rightarrow$" ✓, „$\Leftarrow$": $f(\alpha v)=f(\alpha v+0\cdot v_2)=\alpha f(v)+0\cdot f(v_2)=\alpha f(v)$

$f(v+w)=f(1\cdot v+1\cdot w)=1\cdot f(v)+1\cdot f(w)=f(v)+f(w)$. □

-4- $\mathcal{B} = (v_i)$

$\mathcal{B}$ Basis von V $\Rightarrow$ f ist durch die Angabe der $\overbrace{\text{Bilder auf } \mathcal{B}}^{\text{d.h. der } f(v_i)}$ eindeutig festgelegt.

Jedes $f(v)$ ist für jedes $v \in V$ berechenbar.

$v = \sum \lambda_i v_i \Rightarrow f(v) = f(\sum \lambda_i v_i) = \sum \lambda_i \underline{\underline{f(v_i)}}$

Bsp.: $V = \mathbb{R}^2$, $W = \mathbb{R}^3$. Sei $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \right)$ Basis von V.

Sei $f: V \to W$ erklärt/def. durch

$$f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}.$$ Jedes $f(v)$ ist berechenbar...

Bsp.: in $\mathbb{R}[T]$ betr. $V = L(1, T, T^2) = \{\alpha_0 + \alpha_1 T + \alpha_2 T^2 ; \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}$,

betr. $W = \mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-VR.

$\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$

Gib Abb. $f: V \to W$ an, d.h. als $f: \underbrace{L(1, T, T^2)}_{\dim = 3} \to \underbrace{\mathbb{C}}_{\dim = 2}$.

$\mathbb{C} = \{x + iy ; x, y \in \mathbb{R}\}$

$i = 0 + i \cdot 1$, $1 + i \cdot 0 = 1$ $\leadsto$ $(1, i)$ ist Basis von $\mathbb{C}$

$$f(1) = 1 + i$$
$$f(T) = i - 1$$
$$f(T^2) = 2i.$$

Somit $f(T^2 + T - 1) = f(T^2) + f(T) - f(1) = 2i + i - 1 - (1 + i)$
$= 2i - 2.$

Kern und Bild?

$\ker f = \{p \in V ; f(p) = 0\} = \{\alpha_0 + \alpha_1 T + \alpha_2 T^2 ; \underline{\alpha_0(1+i) + \alpha_1(i-1) + \alpha_2 \cdot 2i = 0}\}$

Re $\to$ $\alpha_0 - \alpha_1 = 0 \to \alpha_0 = \alpha_1 = \lambda$

Im $\to$ $\underbrace{\alpha_0 + \alpha_1}_{2\lambda} + 2\alpha_2 = 0$ $\to \alpha_2 = -\lambda$

$= \{\lambda + \lambda T - \lambda T^2 ; \lambda \in \mathbb{R}\}$

$= L(1 + T - T^2)$ $\to$ $\dim \ker f = 1$

Rangsatz: $\dim \ker f + \dim \operatorname{im} f = \dim V$

Hier: $1 + \dim \operatorname{im} f = 3$

$\Rightarrow \dim \operatorname{im} f = 2$ laut Rangsatz,

d.h. für $f: V \to \mathbb{C}$ ist $\dim \operatorname{im} f = 2 = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, $\operatorname{im} f \subseteq \mathbb{C}$

Also: $\operatorname{im} f = \mathbb{C}$, d.h. f ist surjektiv.

Ein Endomorphismus f, d.h. lin. Abb. $V \to V$,
eines endl. dim. VRes V ist injektiv $\to$ Monomorphismus
genau dann, wenn f surjektiv $\to$ Epimorphismus
genau dann, wenn f bijektiv. $\to$ Isomorphismus

Jeder endl. dim. VR V ist isomorph zu K^n, $n = \dim_K V$.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Basis } (v_1, \ldots, v_n) \text{ von } V \\ \text{wird abgebildet auf } (e_1, \ldots, e_n) \text{ von } K^n\end{array}\right\} \to \text{Isomorphismus}$$