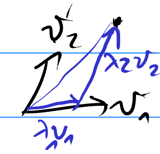
Tutorium zur Linearen Algebra I, Kapitel L10/L11 am 18.11.2019

Sei V ein K-VR.
Seien $v_1, \dots, v_n \in V$.

- $L(v) := \{ \lambda v ;\ \lambda \in K \}$
- $L(v_1, v_2) := \{ \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 ;\ \lambda_1, \lambda_2 \in K \}$

Lineare Hülle von v_1, v_2
= der von v_1, v_2 aufgespannte VR



$$L(v_1, \dots, v_n) := \{ \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n ;\ \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K \}$$
$$= \{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i ;\ \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K \}$$

der von $v_1, \dots, v_n$ aufgespannte UVR in V
= die Lineare Hülle von $v_1, \dots, v_n$

Bsp.: $L\left(\underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_2}}_{x\text{-}y\text{-Ebene}} \right) \subseteq \mathbb{R}^3$, $\quad L\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{y\text{-}z\text{-Ebene}} \right) \subseteq \mathbb{R}^3$

$v_1, \dots, v_n$ heißen linear unabh. $:\Leftrightarrow$ $(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0)$

Bsp.: $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$

Beh.: $v_1, \dots, v_n$ sind lin. unabh.

Bew.: $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & +\lambda_4 = 0 \\ & \lambda_2 + \lambda_3 & & = 0 \\ -\lambda_1 & & -\lambda_3 & +\lambda_4 = 0 \\ -\lambda_1 & +2\lambda_2 & & -\lambda_4 = 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \lambda_2 = 0 \to \lambda_3 = 0 \to \lambda_4 = 0 \to \lambda_1 = 0$$

$\square$

$A \quad \Rightarrow \quad B$

Beh.: $v_1, \dots, v_m$ lin. unabh. $\Rightarrow v_1, \dots, v_m$ p.w. verschieden

Bew.: Sonst seien $v_i = v_j$ mit $i \neq j$.

Dann:

$$\underbrace{\sum_{\substack{k \neq i \\ k \neq j}} 0 \cdot v_k + \underset{\uparrow}{1} \cdot v_i + (\underset{\uparrow}{-1}) \cdot v_j}_{} = 0 \Rightarrow v_1, \dots, v_m \text{ lin. abh.}$$

$\square$

$(\neg B \Rightarrow \neg A)$

---

3 lin. abh. Vektoren des $\mathbb{R}^3$: $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

$u + w = v \Rightarrow w = v - u = (-1) \cdot u + 1 \cdot v$

$\Rightarrow \underline{\underline{w \in L(u, v)}}$

$$\underbrace{L(u, v, w)}_{\text{lin. abh.}} = L(u, v, \underbrace{v - u}_{\text{kann weg}}) = \underbrace{L(u, v)}_{\text{lin. unabh.}}$$

[„$\supseteq$", „$\subseteq$": $v - u \in L(u, v)$ ✓]

- $v \in L(u, w)$, da $v = u + w$
- $u \in L(v, w)$, da $u = v - w$

$\underbrace{(u, v, w)}_{\text{lin. abh.}}$ ist keine Basis

$\underbrace{(u, v)}_{\text{2 Vektoren}}$ ist keine Basis des $\mathbb{R}^3$

$\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \in L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}\right)$? Ja ✓

Beh.: $L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}\right) = L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}\right)$

Bew.: $\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{array}\right] \begin{array}{l} |\cdot(-2) \quad |\cdot(-3) \\ \\ \\ \end{array} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ |\cdot(-2) \\ \\ \end{array}$

$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow -3\lambda_2 = -6 \Rightarrow \underline{\underline{\lambda_2 = 2}}$

$\lambda_1 + 4 \cdot 2 = 7 \Leftrightarrow \underline{\lambda_1 = -1}$

$\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ ✓

Zu L11:

B Basis $\Leftrightarrow$ B ist lin. unabh. Erz.system von V
$\Leftrightarrow$ B ist minim. Erzsystem von V
$\Leftrightarrow$ B ist maximales lin. unabh. System von V
$\Leftrightarrow$ Jedes El. $v \in V$ ist eind. als Lk von Vektoren aus B schreibbar

---

Auswahllemma: Sei $(v_1, \dots, v_n)$ Basis von V, $w = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ mit $\lambda_k \neq 0$.
Dann ist $(v_1, \dots, v_{k-1}, w, v_{k+1}, \dots, v_n)$ Basis von V.
[Vorl. $\rightsquigarrow$ Steinitz, induktiv]

Basiselemente austauschen im VR $V = \mathbb{R}^4$: $B = (e_1, e_2, e_3, e_4)$
Lin. unabh. Menge: $\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{a}, \underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}}_{b} \}$ $\quad a = 2e_1 + 3e_2 + (-1) \cdot e_3 + 0 \cdot e_4$ $\quad 3 \neq 0$

Welche Vektoren in B können durch a ausgetauscht werden? durch e_2, e_1, e_3
$\rightsquigarrow$ (e_1, a, e_3, e_4) Basis des $\mathbb{R}^4$, ebenso (a, e_2, e_3, e_4), $\underbrace{(e_1, e_2, a, e_4)}_{B'}$

$\hookrightarrow$ Welche Vektoren in B' können durch b ausgetauscht werden?
$b = \underset{6 \neq 0}{6} \cdot \underline{\underline{e_1}} + 3 \cdot \underline{\underline{e_2}} + 4 \underline{\underline{e_4}} + 0 \cdot \underline{\underline{a}}$ (mit Basisel. von B' ausgedrückt)
$\underset{\text{Answ.l.}}{\Rightarrow}$ (b, e_2, a, e_4) ist Basis des $\mathbb{R}^4$

Basis bestimmen: von $U = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} ; \underline{x + \beta y + \gamma z = 0} \} \subseteq \mathbb{R}^3$, $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$

- U ist UVR von $\mathbb{R}^3$ [$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in U$ ✓, $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \in U \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix} \in U$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in U \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \\ \alpha z \end{pmatrix} \in U$]

$$U = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} ; \underbrace{x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 = 0}_{x_1 = -\beta x_2 - \gamma x_3} \} = \{ \begin{pmatrix} -\beta x_2 - \gamma x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} ; x_2, x_3 \in \mathbb{R} \}$$

$$= \{ x_2 \begin{pmatrix} -\beta \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -\gamma \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; x_2, x_3 \in \mathbb{R} \} = L(\underbrace{\begin{pmatrix} -\beta \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\gamma \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{lin. unabh.}})$$

$\Rightarrow$ Basis von U: $\left(\begin{pmatrix} -\beta \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\gamma \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} -\beta \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -\gamma \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \left.\begin{array}{l} \rightarrow \lambda_1 = 0 \\ \rightarrow \lambda_2 = 0 \end{array}\right\} \checkmark \Rightarrow \begin{pmatrix} -\beta \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\gamma \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ lin. unabh.}$$

Beh.: $v_1, \dots, v_m$ lin. unabh. $\Rightarrow$ jede LK dieser Vektoren hat eind. bestimmte Koeff., d.h. $\left(\sum \lambda_i v_i = \sum \mu_i v_i \Rightarrow \text{alle } \lambda_i = \mu_i\right)$

Bew.: Sei $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{m} \mu_i v_i$. $\quad | -\sum \mu_i v_i$

Es folgt: $\sum \lambda_i v_i - \sum \mu_i v_i = 0$

Also: $\sum (\lambda_i - \mu_i) \cdot v_i = 0$

Also, da $v_1, \dots, v_m$ lin. unabh., sind alle $\lambda_i - \mu_i = 0$, d.h. alle $\lambda_i = \mu_i$. $\square$

Lösungsmenge eines LGS: $\mathbb{L} = a + L(v)$, $v \neq 0$, Bsp.: $\mathbb{L} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + L\begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} \subseteq \mathbb{R}^3$

Welches LGS hat $\mathbb{L}$ als Lösungsmenge?

$$\mathbb{L} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + L\begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} ; \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 2+\lambda \\ 3-6\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} ; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\left(\begin{array}{l} x_1 = 2 + \lambda \\ x_2 = 3 - 6\lambda \\ x_3 = \lambda \end{array} \right) \Leftrightarrow \underbrace{\left[\begin{array}{l} x_1 = 2 + x_3 \\ x_2 = 3 - 6x_3 \end{array} \right]}_{\substack{\text{2 Glgn.} \\ \text{in 3 Unbek.}}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 - x_3 = 2 \\ x_2 + 6x_3 = 3 \end{array} \right]$$

$$\rightarrow \mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 2+\lambda \\ 3-6\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} ; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$