Vorlesung Lineare Algebra I

WiSe'19/'20 hhu
K. Halupczok

§3: Vektorräume

L9: Vektorräume und Untervektorräume

Stichworte: Bezeichnungen, Vektorraum, Untervektorraum, Familien, $\cap, \cup$ von Vektorräumen, Lineare Hülle $L(S)$ für $S \subseteq V$, Erzeugendensystem

---

Wir vereinbaren für die folgenden Kapitel bestimmte Konventionen für die Schreibweise der math. Objekte, mit denen wir uns ab jetzt beschäftigen. Wenn wir aus bestimmten Gründen von dieser Konvention abweichen (müssen), geben wir dies dann explizit bekannt.

9.1. Bezeichnungen:

1.) Natürliche Zahlen für Indizes: $i, j, k, l, m, n, r, s, t$

2.) Reelle Zahlen, "Skalare": kleine griechische Buchstaben: $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$

Speziell Winkel: φ, ψ, χ

3.) Vektoren: Kleine lateinische Buchstaben: $a, b, c, d, e, x, y, z, u, v, w, \ldots$

Vektoren haben Komponenten, die reelle Zahlen sind: (0 Nullvektor)

Vektor	a	b	c	d	e	x
Komponenten	$\alpha_1, \alpha_2, \ldots$	$\beta_1, \beta_2, \ldots$	$\gamma_1, \gamma_2, \ldots$	$\delta_1, \delta_2, \ldots$	$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$	$\xi_1, \xi_2, \ldots$

Vektor	y	z	u	v	w
Komponenten	$\eta_1, \eta_2, \ldots$	$\zeta_1, \zeta_2, \ldots$	$\mu_1, \mu_2, \ldots$	$\nu_1, \nu_2, \ldots$	$\omega_1, \omega_2, \ldots$

Ü Wie "spricht" man diese kleinen griechischen Buchstaben aus?

Manchmal werden wir dann mehrere Vektoren betrachten und diese durchnumerieren, wie z.B. $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_m$. Dann hat der i-te Vektor v_i die Komponenten $\nu_{i1}, \nu_{i2}, \nu_{i3}, \ldots$ (soviele wie nötig).

Wir werden in diesem § definieren, was Vektoren sind.

3.) Matrizen: große lateinische Buchstaben: A, B, C, D, X, Y, Z

4.) Unbestimmte im Polynomring: T, mehrere Unbestimmte: $T_1, T_2, \ldots$

5.) Vektorräume: U, V, W 6.) Ebenen: E, F, G, H

7.) Lineare Abbildungen: f, g, h 8.) Geraden: f, g, h (sofern keine Kollision mit 7.))

9.2. **Bemerkung:** Bisher betrachtete algebraische Strukturen M (als Menge) haben oft eine innere Verknüpfung $M \times M \to M$, wie z.B. Ringe mit $+$. Man kann auch eine äußere Verknüpfung $N \times M \to M$ mit einer weiteren Menge N haben, wie z.B. der Polynomring $M = \mathbb{R}[T]$ mit der äußeren ("Skalar"-) Multiplikation

$$\mathbb{R} \times M \longrightarrow M$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{reelle Zahl}}}{\alpha} \cdot \underbrace{(\beta_0 + \beta_1 T + \ldots + \beta_m T^m)}_{\text{Polynom}} := \underbrace{(\alpha\beta_0) + (\alpha\beta_1) T + \ldots + (\alpha\beta_m) T^m}_{\text{Polynom}}.$$

Diese Art von Verknüpfung führt zum zentralen Begriff der Linearen Algebra, dem Vektorraum:

9.3. **Def.:** Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Ein $\mathbb{K}$-Vektorraum (bzw. Vektorraum über $\mathbb{K}$) ist eine Menge V zusammen mit zwei Abbildungen $+ : V \times V \to V$, und $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$, $(\alpha, x) \mapsto \alpha \cdot x$ wobei folgende Gesetze gelten:

(1.) $(V, +)$ ist eine abelsche Gruppe,

(2.) $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$ für alle $\alpha \in \mathbb{K}$, $x, y \in V$,

(3.) $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $x \in V$,

(4.) $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha \cdot \beta) \cdot x$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $x \in V$,

(5.) $1 \cdot x = x$ für alle $x \in V$.

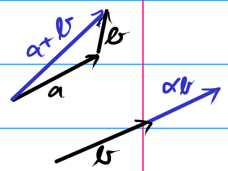
Die Elemente von V heißen Vektoren, das neutrale El. von $(V, +)$ ist der Nullvektor o, und die innere Verknüpfung $+$ ("Plus") heißt Vektoraddition. Die Elemente von $\mathbb{K}$ werden Skalare genannt, und die äußere Verknüpfung $\cdot$ ("Mal") heißt Multiplikation mit Skalaren bzw. Skalarmultiplikation.

9.4. **Bemerkungen und Bezeichnungen**

(1) Falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, heißt V ein reeller Vektorraum, falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, ein komplexer Vektorraum. Spielt $\mathbb{K}$ keine Rolle, spricht man kurz von einem Vektorraum, Abkürzung: VR.

(2) Das Axiom (5.) hat den Zweck, die triviale Multiplikation mit Skalaren auszuschließen, bei der $\alpha \cdot x = o$ für alle $\alpha \in \mathbb{K}$ und alle $x \in V$ gesetzt würde.

9.5 <u>Wichtigstes Bsp. für einen $\mathbb{K}$-VR:</u> Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\mathbb{K}^n = \overbrace{\mathbb{K} \times \ldots \times \mathbb{K}}^{n \text{ mal}}$ (wie in L5.4 konstruiert) mit den Abb. $+ : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$,



$$((\alpha_1, \ldots, \alpha_n), (\beta_1, \ldots, \beta_n)) \mapsto (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) + (\beta_1, \ldots, \beta_n) := (\alpha_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_n + \beta_n),$$

und $\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$

$$\alpha \cdot (\beta_1, \ldots, \beta_n) := (\alpha\beta_1, \ldots, \alpha\beta_n)$$

ein $\mathbb{K}$-VR. Es ist üblich, die Elemente von $\mathbb{K}^n$ als Spalten zu schreiben, also in der Form $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ mit $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$. "Spaltenvektoren"

Konvention: $\mathbb{K}^n = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} ; \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K} \right\}$. Ab jetzt folgen wir dieser Konvention.

Somit ist etwa $\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

Den $\mathbb{K}^1$ identifizieren wir praktischerweise mit $\mathbb{K}$.

9.6. <u>Weitere Beispiele für VRe:</u> (1) Der Polynomring $\mathbb{K}[T]$ wird ein $\mathbb{K}$-VR, wenn die Skalarmult. koeffizientenweise erklärt wird:

$$\alpha \cdot (\beta_0 + \beta_1 T + \ldots + \beta_n T^n) := (\alpha\beta_0) + (\alpha\beta_1)T + \ldots + (\alpha\beta_n)T^n$$

für alle $\alpha \in \mathbb{K}$, alle $\beta_0 + \beta_1 T + \ldots + \beta_n T^n \in \mathbb{K}[T]$, alle $n \in \mathbb{N}_0$.

(2) Sei $A \neq \emptyset$ eine Menge und $V := \mathbb{K}^A := \{ f : A \to \mathbb{K} ; f \text{ Abbildung} \}$. Erklären wir für $f, g \in V$, $\alpha \in \mathbb{K}$ die Abb. $f+g$ und $\alpha \cdot f$ durch die Setzung $(f+g)(x) := f(x) \underset{\text{in } \mathbb{K}}{+} g(x)$, $(\alpha \cdot f)(x) := \alpha \underset{\text{in } \mathbb{K}}{\cdot} f(x)$ für alle $x \in A$,

so ist V ein $\mathbb{K}$-VR.

Speziell die Menge $\{ (\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}_0} ; \alpha_0, \alpha_1, \ldots \in \mathbb{R} \} = \{ \alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{R} ; \alpha \text{ Abb.} \} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ der reellen Folgen ist auf diese Weise ein $\mathbb{R}$-VR.

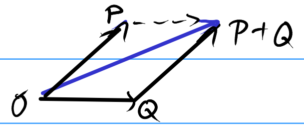
(3) Sei $A \neq \emptyset$ eine Menge und V ein $\mathbb{K}$-VR. Dann wird

$$V^A := \{ f : A \to V ; f \text{ Abb.} \}$$ mit analog erklärten $+, \cdot$ ein $\mathbb{K}$-VR.

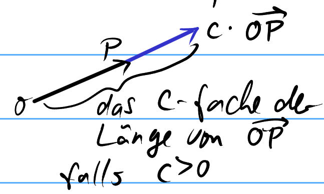
Da $\mathbb{K}$ selbst ein $\mathbb{K}$-VR ist, erhält man für $V = \mathbb{K}$ wieder Bsp. (2) zurück.

(4) Ein Pfeil $\overrightarrow{PQ}$ im Anschauungsraum ist durch Anfangspunkt P und Pfeilspitze Q gekennzeichnet; ein Pfeil ist in diesem Sinne ein geordnetes Punktepaar. Sei V_O die Menge aller Pfeile im Anschauungsraum mit einem beliebigen, aber festen Anfangspunkt O. Die Addition zweier

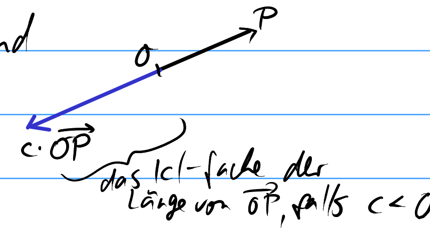
Pfeile $\overrightarrow{OP}$ und $\overrightarrow{OQ}$ erklären wir durch die "Parallelogrammregel",



und die Multiplikation $c \cdot \overrightarrow{OP}$, $c \in \mathbb{R}$, durch



und



und $0 \cdot \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO} = \mathfrak{o}$

Damit wird V_O zu einem VR, seine Elemente heißen Ortsvektoren.

(5) Die Menge F der Pfeile $\overrightarrow{PQ}$ im Anschauungsraum ist kein VR. Wir können aber Pfeile identifizieren /als gleich ansehen, wenn sie gleichlang, parallel und gleichgerichtet sind ($\overrightarrow{PP} = \mathfrak{o}$). Zwei solche Pfeile nennen wir äquivalent (und erhalten so eine Äquivalenzrelation auf F). Jede Äquivalenzklasse $[\overrightarrow{PQ}]$ von Pfeilen heißt freier Vektor (im Anschauungsraum) – im Gegensatz zu den Ortsvektoren. Die Menge $\tilde{V}$ dieser freien Vektoren ist ein Vektorraum. Jeder Ortsvektor in V_O repräsentiert eine Pfeilklasse, so dass der hier erklärte Vektorraum $\tilde{V}$ mit dem Vektorraum V_O identifiziert werden kann. Der Unterschied ist, dass zur Def. von $\tilde{V}$ kein Anfangspunkt O benötigt wird. Dies macht Rechnen in $\tilde{V}$ leichter, wie z.B. $[\overrightarrow{PQ}] + [\overrightarrow{QR}] = [\overrightarrow{PR}]$.

(6) Sind $V_1, \dots, V_n$ alles $\mathbb{K}$-VRe, so ist das (kartesische) Produkt $V_1 \times \dots \times V_n := \{(v_1, \dots, v_n);\ v_i \in V_i \text{ für alle } i \in \{1, \dots, n\}\}$ mit der komponentenweise erklärten Addition und Skalarmultiplikation auch wieder ein $\mathbb{K}$-VR.

9.7. Eigenschaften von VRen. Es sei V ein $\mathbb{K}$-VR. Dann gilt:

(1.) $\alpha \cdot \mathfrak{o} = \mathfrak{o}$ für alle $\alpha \in \mathbb{K}$,

(2.) $0 \cdot x = \mathfrak{o}$ für alle $x \in V$,

(3.) Aus $\alpha \cdot x = \mathfrak{o}$ folgt stets $\alpha = 0$ oder $x = \mathfrak{o}$,

(4.) $(-1) \cdot x = -x$ für alle $x \in V$.

Bew.: (1): $\alpha \cdot \mathfrak{o} = \alpha \cdot (\mathfrak{o} + \mathfrak{o}) = \alpha \cdot \mathfrak{o} + \alpha \cdot \mathfrak{o} \Rightarrow \alpha \cdot \mathfrak{o} = \mathfrak{o}$.

(2.): $0 \cdot x = (0+0) \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x \Rightarrow 0 \cdot x = \mathfrak{o}$.

(3): Aus $\alpha \cdot x = \mathfrak{o}$, $\alpha \neq 0$, folgt $\mathfrak{o} \overset{(1.)}{=} \alpha^{-1} \cdot (\alpha x) = (\alpha^{-1} \cdot \alpha) x = 1 \cdot x = x$.

(4.): Aus $\mathfrak{o} = 0x = (1-1)x = (1+(-1))x = x + (-1)x$ folgt $(-1) \cdot x = -x$. □

9.8. <u>Bem.:</u> Teilmengen von Vektorräumen sind interessant, wenn sie selbst wieder eine (Unter-)struktur haben, die von der Struktur des umgebenden VRs herrührt:

9.9. <u>Def.:</u> Eine Teilmenge $U \subseteq V$ eines VRs V über K ist ein Untervektorraum von V, falls gilt: $\underbrace{0 \in U}_{\text{damit } U \neq \emptyset}$, $\forall x,y \in U: x+y \in U$, $\forall \alpha \in K \forall x \in U: \alpha x \in U$

Kurz: U ist UVR.

(Abgeschlossenheit des UVRs bzgl. $+$ und Skalarmult. $\cdot$).

9.10. <u>Bem.:</u> Ist die Teilmenge U bei Bilden von $+$ bzw. $\cdot$ abgeschlossen wie in der Def. verlangt, so ist U selbst wieder ein VR, nämlich mit den von V "geerbten" Verknüpfungen $+, \cdot$.

9.11. <u>Def.:</u> Ist U ein UVR des VRs V und $a \in V$, so heißt die Vektormenge $a + U := \{a + u \mid u \in U\}$ affiner Unterraum.

(Ist nur für $a \in U$ wieder ein VR! Ein affiner Unterraum ist ein um a verschobener UVR.)

9.12. <u>Bsp. für UVRe:</u> (1) Für jeden VR V sind V und $\{0\}$ triviale UVRe von V.

(2) Sei A eine Menge und $a \in A$. Dann ist $\{f \in \mathbb{K}^A;\ f(a) = 0\}$ ein UVR von $\mathbb{K}^A$.

(3) Jede Ursprungsgerade $g_m = \{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2;\ y = mx\}$ für $m \in \mathbb{R}$ ist ein UVR von $\mathbb{R}^2$, selbst die y-Achse $g = \{\binom{0}{y} \in \mathbb{R}^2;\ y \in \mathbb{R}\}$, die keine "Steigung" m hat.

9.13. <u>Satz:</u> Der Durchschnitt beliebig vieler UVRe von V ist ein UVR von V.

<u>Bew.:</u> Liegen u, v in diesem Durchschnitt, dann auch in jedem der UVRe. Also liegt auch $u+v$ darin. Und ebenso gilt dies für $\alpha \cdot u$. Also greift direkt Def. 9.9. □

<u>Bem.:</u> Wir meinen mit "beliebig vielen" UVRe eine Familie $(U_i)_{i \in I}$ von UVRen mit irgendeiner Indexmenge $I \neq \emptyset$. Ihr Durchschnitt ist

$$\bigcap_{i \in I} U_i := \{x;\ \forall i \in I: x \in U_i\}.$$

Ihre Vereinigung wäre $\bigcup_{i \in I} U_i := \{x;\ \exists i \in I: x \in U_i\}$.

Man kann auch das kartesische Produkt

$$\prod_{i \in I} U_i := \{(u_j)_{j \in I};\ \forall j: u_j \in U_j\}$$ bilden.

(Ist I endlich, schreibt man auch $\bigtimes_{i \in I} U_i$ dafür.)

Dieses Konzept gilt für beliebige Mengen in unserem Axiomensystem (ZFC).

9.14. **Satz:** Sind U_1, U_2 UVRe von V, so auch die Summe
$$U_1 + U_2 := \{ u_1 + u_2 ;\ u_1 \in U_1,\ u_2 \in U_2 \} \subseteq V.$$
Bew.: Die Abgeschlossenheit bzgl. $+, \cdot$ in Def. 9.9 ist sofort klar, da U_1, U_2 UVRe von V sind. □

9.15. **Bem.:** • Die Vereinigung $U_1 \cup U_2$ ist i.a. kein UVR!
Bsp.: $V = \mathbb{R}^2$, $U_1 = \{ \binom{x}{0} ; x \in \mathbb{R} \}$, $U_2 = \{ \binom{0}{y} ; y \in \mathbb{R} \}$
$\rightsquigarrow U_1 \cup U_2$ ist Achsenkreuz, kein VR

• Die Summe $A + B := \{ a + b ;\ a \in A, b \in B \}$ beliebiger Teilmengen A, B von V muss kein UVR sein, Bsp.: $\{a\} + \{b\} = \{a+b\}$, wenn $a + b \neq 0$

• Ist eine Familie $(V_i)_{i \in I}$ von VRen mit UVRen U_i von V_i für jedes i gg., ist $\prod_{i \in I} U_i$ ein UVR von $\prod_{i \in I} V_i$.

Linearkombinationen / Lineare Hülle:

9.16. **Def.:** Eine Linearkombination der Vektoren $v_1, \dots, v_m \in V$ (kurz: LK) ist ein Vektor $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m \in V$ mit $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{K}$.
Schreiben auch das Symbol $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i$ für $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m$.

9.17. **Bsp.:** $v = \binom{2}{3} \in \mathbb{R}^2$ ist eine Linearkomb. von $e_1 = \binom{1}{0}, e_2 = \binom{0}{1} \in \mathbb{R}^2$, da $v = 2e_1 + 3e_2$.

9.18. **Def.:** Die Lineare Hülle einer Teilmenge S eines $\mathbb{K}$-VRs V ist die Menge aller Linearkombinationen von jeweils endlich vielen Vektoren aus S, also $L(S) := \{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \mid v_i \in S, \lambda_i \in \mathbb{K}, n \in \mathbb{N} \}$,
und $L(\emptyset) := \{0\}$.

Andere gebräuchliche Notationen für $L(S)$ sind $\langle S \rangle$, $\operatorname{span}(S)$, ...

Bsp.: • Sei V ein $\mathbb{K}$-VR, $v \in V$. Dann ist $L(\{v\}) = \{ \lambda v \mid \lambda \in \mathbb{K} \}$.
Schreiben dafür auch einfach $L(v)$.

• $L(V) = V$ für jeden $\mathbb{K}$-VR V. Also ist auch $L(U) = U$ für jeden UVR U von V.

9.19. **Satz:** $L(S) = \bigcap_{\substack{U \text{ UVR von } V \\ S \subseteq U}} U$, d.h. $L(S)$ ist der Durchschnitt aller UVRe U von V, die S als Teilmenge enthalten.

Bew.: Es ist $L(S)$ ein UVR von V wegen Abgeschlossenheit bzgl. $+, \cdot$.
Da $S \subseteq L(S)$ ist somit $\bigcap U \subseteq L(S)$, d.h. „$\supseteq$" der Beh. ist korrekt.
Zu „$\subseteq$": bel. Linearkombinationen von Vektoren aus S liegen in jedem $\bigcap_{\substack{U \text{ UVR von } V \\ S \subseteq U}}$ UVR U von V, der dieses S als Teilmenge enthält, wg. Def. 9.9 □

9.20. **Lemma:** Sei V ein VR und seien $A, B \subseteq V$ beliebige Teilmengen.
Dann gilt $L(A \cup B) = L(A) + L(B)$.

Bew.: „$\subseteq$": Sind $v_1, \dots, v_n \in A \cup B$, ist $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = \sum_{i, v_i \in A} \lambda_i v_i + \sum_{i, v_i \in B \setminus A} \lambda_i v_i \in L(A) + L(B)$.
„$\supseteq$": Haben $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i + \sum_{i=m+1}^{m+m} \lambda_i b_i = \sum_{k=1}^{m+m} \lambda_i v_i \in L(A \cup B)$, wo $v_i := \begin{cases} a_i, & 1 \le i \le m \\ b_i, & m+1 \le i \le m+m, \end{cases}$
d.h. alle $v_i \in A \cup B$. □

9.21. **Kor.:** Sei V ein VR und U_1, U_2 seien UVRe.
Dann gilt $U_1 + U_2 = L(U_1 \cup U_2)$.

Bew.: $L(U_1 \cup U_2) = L(U_1) + L(U_2) = U_1 + U_2$. □

Wir führen noch einen nützlichen Begriff ein.

9.22. **Def.:** Eine Menge $S \subseteq V$ heißt Erzeugendensystem des UVRs U von V, falls $U = L(S)$ gilt.

9.23. **Bsp.:**
- $\left\{\binom{1}{0}, \binom{0}{1}\right\}$ ist Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^2$, aber auch $\left\{\binom{1}{0}, \binom{2}{2}\right\}$, nicht aber $\left\{\binom{1}{0}, \binom{2}{0}\right\}$.
- $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}$ ist kein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^3$, da etwa $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ nicht als LK der drei Vektoren geschrieben werden kann. Dies behandeln wir im folgenden § genauer.

9.24. **Bem.:** Andere gebräuchliche Namen für $L(S)$ sind etwa "der von S erzeugte UVR", "der Span von S", "das lineare Erzeugnis von S", "der von S aufgespannte UVR", ...

9.25. **Lemma** (Nützliche Eigenschaften der Linearen Hülle):
Sei V ein VR, und $A, B \subseteq V$. Dann gilt:
(1) $A \subseteq B \Rightarrow L(A) \subseteq L(B)$, (2) $A \subseteq L(A)$, (3) $L(A) = L(L(A))$,
(4) $L(A) = \bigcup_{\substack{A_0 \subseteq A \\ \# A_0 < \infty}} L(A_0)$, (5) $v \in L(A) \Rightarrow L(A) = L(A \cup \{v\})$.

Bew.: (1), (2): klar laut Def., (3) klar laut 9.18, da $L(A)$ ein VR laut 9.19 + 9.13,
(4): „$\supseteq$" wegen (1) ✓, „$\subseteq$": jedes $x \in L(A)$ ist ja LK von endl. vielen El. von A.
(5): „$\subseteq$" wegen (1), „$\supseteq$": da ja $v \in L(A)$, gilt $A \cup \{v\} \subseteq A \cup L(A) \overset{(2)}{\subseteq} L(A)$,
mit (1) folgt $L(A \cup \{v\}) \subseteq L(L(A)) \overset{(3)}{=} L(A)$, also die Beh. □