Vorlesung Lineare Algebra I

WiSe'19/'20 hhu
K. Halupczok

§2: Algebraische Grundbegriffe

L8 : Konkrete Gruppen, Ringe, Körper

Stichworte: Konstruktion der Zahlbereiche $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ mit Ä-Relationen, Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$, Polynome, Polynomdivision, Nullstellenabspaltung

---

Konstruktion der Zahlbereiche

8.1. Ä-Relationen werden sehr vielfältig eingesetzt, um neue mathematische Strukturen zu definieren (z.B. Quotientenvektorräume, Quotientenkörper, Randverklebungen...). Eine Hauptanwendung ist die Konstruktion der Zahlbereiche

$\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$, die wir hier angeben (natürlich gibt es viele andere Möglichkeiten, dies zu tun). Wir gehen dabei davon aus, dass die nat. Zahlen $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ bereits (axiomatisch) erklärt sind (was wir nicht näher vertiefen wollen; dahinter steckt u.a. das Prinzip der vollständigen Induktion). Ebenso sei bekannt, dass mit $(\mathbb{N}_0, +)$ und $(\mathbb{N}, \cdot)$ jeweils eine Halbgruppe mit Eins, nämlich 0 bzw. 1, gegeben ist.

8.2. Def.: $\mathbb{Z} := \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 / \sim$ mit der Ä-Relation

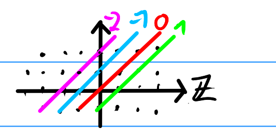
$$(n,m) \sim (u,v) \;:\Leftrightarrow\; n+v = m+u. \quad (\text{„}n-m = \text{Konstante"}...)$$

Darin ist $\mathbb{N}_0$ „eingebettet" in der Form $\{[(n,0)] \mid n \in \mathbb{N}_0\}$.

Weiter: $[(n,m)] + [(u,v)] := [(n+u, m+v)]$.

Die Zahl $-n$ für $n \in \mathbb{N}_0$ liegt vor als $[(0,n)]$,

denn $[(n,0)] + [(0,n)] = [(n,n)] = [(0,0)]$.



bei der Konstruktion spielt nur der 1. Quadrant $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ eine Rolle!

Ü Wie geht die Definition von „$\cdot$" und „$\leq$"? (nicht naheliegend!)
Welche Eigenschaften haben $+, \cdot$ und $\leq$?

(vgl. auch mit der Konstruktion in 8.3, die ähnlich ist.)

8.3. **Def.:** $\mathbb{Q} := \mathbb{Z} \times \overset{\text{ohne } 0}{\mathbb{N}} /\sim$ mit der Ä-Relation

$$(z,n) \sim (y,m) \;:\iff\; zm = ny$$

Darin ist $\mathbb{Z}$ "eingebettet" in der Form $\{[(z,1)] \mid z \in \mathbb{Z}\}$.
Wir schreiben dann $\frac{z}{n}$ für $[(z,n)]$ und erhalten die üblichen Rechengesetze für $+, \cdot$, wenn wir erklären:

$$\frac{z}{n}\cdot\frac{y}{m} := \frac{zy}{nm}, \qquad \frac{z}{n}+\frac{y}{m} := \frac{zm+yn}{nm}.$$

Def. $\le$: $\frac{z}{n} \le \frac{y}{m} :\iff zm \le yn$.

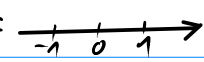
8.4. **Def.:** $\mathbb{R} := \mathcal{C}/\sim$ mit der Menge

$$\mathcal{C} := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q} \mid \underbrace{(a_n) \text{ ist Cauchyfolge in } \mathbb{Q}}_{\forall \varepsilon>0\; \exists N_\varepsilon\; \forall n,m \ge N_\varepsilon:\; |a_n - a_m| < \varepsilon}\}$$

und der Ä-Relation $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (b_n)_{n\in\mathbb{N}} :\iff (a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Nullfolge.
$\iff \forall\varepsilon>0\;\exists N_\varepsilon\;\forall n\ge N_\varepsilon: |a_n-b_n|<\varepsilon$

8.5 **Satz:** Der Körper der reellen Zahlen ist "der" (bis auf Isomorphie, vgl. 8.13) eindeutig bestimmte vollständige angeordnete Körper, der $\mathbb{Q}$ fortsetzt. (ohne Bew.)

8.6. **Def.:** Ein Körper K (mit Verknüpfungen $+,\cdot$) und einer strikten Anordnung "$<$" (die trichotomisch, d.h. $\forall x,y\in K: x<y \;\dot\vee\; x=y \;\dot\vee\; y<x$ mit "$\dot\vee$" für entweder-oder, und transitiv (1.2) ist) heißt angeordneter Körper,
falls $\forall x,y,z\in K: x<y \Rightarrow x+z<y+z$ (Monotonie der Addition)
und $\forall x,y,z\in K: x<y, z>0 \Rightarrow xz<yz$ (Monotonie der Multiplikation) gilt.
Mit einer strikten Anordnung $<$ def. man eine Anordnung "$\le$" durch $x\le y :\iff x<y \vee x=y$

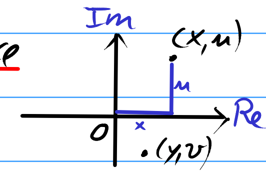
8.7. Auf diesem Wege erreichen wir eine Fortsetzung der Zahlbereiche: $\mathbb{N}_0 \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$.
Sie haben alle die Eigenschaft, dass sie eine Anordnung "$<$" besitzen. Deren El. lassen sich demnach auf einem Zahlenstrahl anordnen: $\mathbb{R}$: 
Es gibt noch eine weitere Fortsetzung, man kann $\mathbb{R}$ zu einem Körper $\mathbb{C}$ fortsetzen:

8.8. **Def.:** In $\mathbb{R}^2=\{(x,u);\, x,u\in\mathbb{R}\}$ def. $(x,u)+(y,v) := (x+y,\, u+v)$
und $(x,u)\cdot(y,v) := (xy-uv,\, xv+uy)$ für $x,y,u,v\in\mathbb{R}$.

8.9. **Satz:** Die Menge $\mathbb{R}^2$ ist mit diesen Verknüpfungen $+,\cdot$ ein Körper, der $\mathbb{R}$ und die Verknüpfungen $+,\cdot$ von $\mathbb{R}$ fortsetzt, vgl. 8.12.

8.10. <u>Def.:</u> Man nennt $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$ den <u>Körper der komplexen Zahlen.</u>
Dieser wird mit $\mathbb{C}$ bezeichnet.
Eine komplexe Zahl $z=(x,u)\in\mathbb{C}$ hat immer zwei reelle Komponenten, hier $x,u\in\mathbb{R}$.
Die 1. Komponente x von z heißt <u>Realteil</u>, $x=\operatorname{Re} z$,
die 2. Komponente der <u>Imaginärteil</u> $u=\operatorname{Im} z$.

<u>komplexe Ebene</u> $\mathbb{C}$:



8.11. <u>Bew. von Satz 8.9:</u> • Die Multiplikation ist offensichtlich kommutativ.
• Sie ist auch assoziativ:

$$\big((x,u)\cdot(y,v)\big)\cdot(r,s)=(xy-uv,\ xv+uy)\cdot(r,s)$$
$$=\big((xy-uv)r-(xv+uy)s,\ (xy-uv)s+(xv+uy)r\big)$$
$$=\big(x(yr-vs)-u(ys+vr),\ x(ys+vr)+u(yr-vs)\big)$$
$$=(x,u)\cdot(yr-vs,\ ys+vr)=(x,u)\cdot\big((y,v)\cdot(r,s)\big)$$

• Es gelten die Distributivgesetze; wegen der Kommutativität genügt es, eines davon nachzurechnen: Ü • Die Multiplikation ist eine Verknüpfung auf $\mathbb{R}^2\setminus\{0,0\}$:
Seien $(x,u)\neq(0,0)\neq(y,v)$. Wäre $(x,u)\cdot(y,v)=0$, folgte $xy-uv=0$, $xv+uy=0$ und somit $0=(xy-uv)^2+(xv+uy)^2=(x^2+u^2)\cdot(y^2+v^2)$, also wäre $x^2+u^2=0$ $(\Leftrightarrow (x,u)=0)$ ↯ $\vee$ $y^2+v^2=0$ $(\Leftrightarrow (y,v)=0)$ ↯
• Das neutrale El. bzgl. $\cdot$ ist $(1,0)$, da $(x,u)\cdot(1,0)=(x,u)$.
• Das inverse El. zu $(x,u)\neq(0,0)$ ist $\left(\frac{x}{x^2+u^2},\frac{-u}{x^2+u^2}\right)$. □

8.12. <u>Bem.:</u> Die Teilmenge $\mathbb{R}\times\{0\}=\{(x,0);\ x\in\mathbb{R}\}$ von $\mathbb{C}$ ist bzgl. der in $\mathbb{C}$ erklärten Addition und Multiplikation selbst ein Körper, und die Abbildung $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\times\{0\}$, $x\mapsto(x,0)$ ist bijektiv und respektiert die Verknüpfungen $+,\cdot$, d.h.

$$f(\underset{+\text{ in }\mathbb{R}}{x+y})=f(x)\underset{+\text{ in }\mathbb{R}\times\{0\}}{+}f(y),\quad f(\underset{\cdot\text{ in }\mathbb{R}}{x\cdot y})=f(x)\underset{\cdot\text{ in }\mathbb{R}\times\{0\}}{\cdot}f(y)$$

gilt für alle $x,y\in\mathbb{R}$. ⊛

"strukturgleich" Wir identifizieren $\mathbb{R}\times\{0\}$ daher mit $\mathbb{R}$ und sagen, die Teilmenge $\mathbb{R}\times\{0\}$ ist <u>isomorph</u> zu $\mathbb{R}$. Analog ist $\{0\}\times\mathbb{R}$ isomorph zu $\mathbb{R}$.

8.13. <u>Def.:</u> Zwei Körper K_1 und K_2 heißen <u>isomorph</u>, falls es eine bijektive Abb. $f:K_1\to K_2$ gibt mit ⊛ für alle $x,y\in K_1$. In diesem Fall heißt f ein <u>Körperisomorphismus.</u>

8.14. **Bem.:** Jede komplexe Zahl $z=(x,u)$ lässt sich darstellen als $z=(x,u)=(x,0)+(0,u)=(x,0)+(0,1)\cdot(u,0)$. Mit der Abkürzung $i:=(0,1)$ erhalten wir also $\underline{\underline{z = x + iu}}$.
Offenbar gilt $i^2=-1$. Statt $0+iu$ schreibe iu, statt $x+i\cdot 0$ schreibe x.

8.15 **Bem.:** Ist $z\in\mathbb{C}$, $z\neq 0$, schreiben wir für z^{-1} auch $\frac{1}{z}=\frac{1}{a+ib}$.
Ist z.B. $z=x+iu$, $w=y+iv$, dann ist
$z\cdot w=(x+iu)\cdot(y+iv)=xy+ixv+iuy+i^2uv=(xy-uv, xv+uy)$.
Ist $z\neq 0$, gilt $\frac{1}{z}=\frac{1}{x+iu}=\frac{x-iu}{(x+iu)(x-iu)}=\frac{x}{x^2+u^2}-i\frac{u}{x^2+u^2}$.
Mit $z=x+iu\in\mathbb{C}$ ist auch $\bar{z}=x-iu\in\mathbb{C}$. Die komplexe Zahl $\bar{z}$ heißt die zu z konjugiert komplexe Zahl.

8.16. **Satz:** Es gilt für alle $z,w\in\mathbb{C}$: (i) $\overline{z+w}=\bar{z}+\bar{w}$, $\overline{z\cdot w}=\bar{z}\cdot\bar{w}$,
(ii) $\overline{(\bar{z})}=z$, (iii) $z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow z=\bar{z}$, (iv) $z\cdot\bar{z}\geq 0$ und $z\cdot\bar{z}=0\Leftrightarrow z=0$.

8.17. **Def.:** Die reelle Zahl $(z\cdot\bar{z})^{1/2}$ heißt der Betrag von z. [**Bew.:** Ü]

8.18. **Satz:** $\mathbb{C}$ ist nicht anordenbar, d.h. nicht so, dass die Multiplikation monoton ist.
Bew.: Klar: $i\neq 0$. Wäre "<" eine Anordnung und $i>0$, folgte $i\cdot i>i\cdot 0$, d.h. $-1>0$ ↯.
Wäre $i<0$, folgte $-i>0$, also $(-i)\cdot(-i)>(-i)\cdot 0$, also wieder $-1>0$ ↯. □

[Beachte: $-1>0$ ist ein ↯, denn daraus folgt (mal $(-1)>0$): $1>0$, mit $-1>0$ folgt $0>0$ ↯ zur Trichotomie.]

Polynome: Gegeben sei ein Körper K.

8.19. **Def.:** Ein Polynom P über K ist eine Folge $a_0,a_1,a_2,\ldots,a_n,a_{n+1},\ldots$ von von Körperelementen, deren El. ab einer Stelle alle $=0$ sind, d.h. $\exists n\in\mathbb{N}\ \forall k>n$: $a_k=0$. Also: $P=(a_0,a_1,\ldots,a_n,0,0,\ldots)$. Wir schreiben in symbolischer Form $P=a_0+a_1X+a_2X^2+\ldots+a_nX^n$ oder auch $P=\sum_{i=0}^{n}a_iX^i$, oder auch $P=a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+\ldots+a_1X+a_0$. Ein Polynom der Form X^i heißt ein Monom. Das Polynom $P=(0,\ldots,0)$ heißt Nullpolynom, kurz: $P=0$.
Ist $P\neq 0$, heißt $n=\max\{k\in\mathbb{N}_0;\ a_k\neq 0\}$ der Grad von P und a_n heißt dann der Leitkoeffizient von P. Schreiben: $\deg P=n$, es sei $\deg 0:=-1$ (auch: $-\infty$).
Ist der Leitkoeffizient $=1$, so heißt das Polynom normiert.
Die Menge aller Polynome über K bezeichnen wir mit $K[X]$. Man nennt X die Unbestimmte eines Polynoms.

8.20. **Bsp.:** $P=X^2+2X-3\in\mathbb{R}[X]$ hat $\deg P=2$, $Q=X^4-iX\in\mathbb{C}[X]$ hat $\deg Q=4$.

8.21. Wir führen auf $K[X]$ eine Addition und Multiplikation ein, so dass formal wie mit Körperelementen gerechnet werden kann, wie z.B. $(a_0+a_1X)\cdot(b_0+b_1X+b_2X^2) = a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)X+(a_0b_2+a_1b_1)X^2 + a_1b_2X^3$.

8.22. **Def.**: Für Polynome $P=a_0+a_1X+\dots+a_nX^n$ und $Q=b_0+b_1X+\dots+b_mX^m$ in $K[X]$ mit $n\geq m$, man setze dabei $b_{m+1}:=0,\dots,b_{n-1}:=0,\ b_n:=0$ falls $m<n$, def. $\underline{P+Q} := (a_0+b_0)+(a_1+b_1)X+\dots+(a_n+b_n)X^n \in K[X]$.
und $\underline{P\cdot Q} := c_0+c_1X+\dots+c_{n+m}X^{n+m} \in K[X]$ mit $c_i=\sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k}$,
d.h. $c_0=a_0b_0$, $c_1=a_0b_1+a_1b_0, \dots$ usw.

8.23. **Satz**: $(K[X],+,\cdot)$ ist kommutativer Ring mit 1.

Bew.: Da die Verknüpfung + praktisch in K^n mit geeignetem n ausgeführt wird, ist unmittelbar klar, dass $(K[X],+)$ eine abelsche Gruppe ist; das neutr. El. ist das Nullpolynom 0, und inverses El. zu $P=a_0+a_1X+\dots+a_nX^n$ ist $-P:=(-a_0)+(-a_1)X+\dots+(-a_n)X^n$. Die Assoziativität von $\cdot$ und die Distributivgesetze ergeben sich durch Nachrechnen (Ü). Wegen
$$\sum_{l=0}^{i} a_l b_{i-l} \underset{i-l=:k}{=} \sum_{k=0}^{i} a_{i-k} b_k = \sum_{k=0}^{i} b_k a_{i-k}$$
ist $P\cdot Q=Q\cdot P$, die Multiplikation also kommutativ. Das konstante Polynom $1=1+0\cdot X+0\cdot X^2+\dots$ ist das Einselement. □

8.24. **Bem.**:
- Für alle Polynome $P,Q\in K[X]$ gilt: $\deg(P+Q)\leq \max(\deg P, \deg Q)$, und ist $P\neq 0\neq Q$, gilt: $\deg(P\cdot Q)=\deg(P)+\deg(Q)$.
- Jedes Polynom $P=a_0+a_1X+\dots+a_nX^n$ erzeugt eine Fkt. auf K, die Polynomfunktion $K\to K$, $x\mapsto a_0+a_1x+\dots+a_nx^n$.

8.25. **Satz (Polynomdivision)**: Zu Polynomen $P,Q\in K[X]$, $Q\neq 0$, ex. eindeutig bestimmte Polynome $R,S\in K[X]$ mit $P=S\cdot Q+R$ und $\deg R<\deg Q$.

8.26. **Bem.**: Man nennt dann R den Rest der Polynomdivision von P durch Q, und S den Quotienten (der ...."...). Polynomringe erlauben also eine Division mit Rest, genau wie im Ring $\mathbb{Z}$ (wie etwa

$253 : 17 = 14$
$\underline{17}$
83
$\underline{68}$
15 ← Rest 15

Also: $\underbrace{253}_{P} = \underbrace{14}_{S}\cdot\underbrace{17}_{Q}+\underbrace{15}_{R}$

8.27 **Beweis von Satz 8.25:**

• Existenz von R und S: Klar für $\deg P < \deg Q$: dann ist $S=0$, $R=P$.

OE
O.B.d.A.

Somit können wir OE $\deg P \geq \deg Q$ annehmen.

Dann führen wir eine vollst. Ind. nach $n = \deg P$:

Ind.anf.: $n=0$: Dann ist $P = a_0$, $a_0 \neq 0$, und auch $\deg Q = 0$, also $Q = b_0 \neq 0$.
Haben dann $P = a_0 b_0^{-1} Q + 0$.

Ind.schritt: $\deg P \leq n-1 \rightsquigarrow \deg P = n$: Seien $P = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n$, $a_n \neq 0$, und $Q = b_0 + b_1 X + \ldots + b_m X^m$, $b_m \neq 0$, und $m \leq n$. Betr. $P_1 := P - \frac{a_n}{b_m} X^{n-m} \cdot Q$ mit $\deg P_1 < n$. "Echt kleiner n"
Für $\deg P_1 < \deg Q$ folgt nach obigem, für $\deg P_1 \geq \deg Q$ folgt nach Induktionsvor., dass $\exists R_1, S_1 \in K[X]: P_1 = S_1 Q + R_1$, $\deg R_1 < \deg Q$.
Dann folgt $P = (S_1 + \frac{a_n}{b_m} X^{n-m}) \cdot Q + R_1$ mit $\deg R_1 < \deg Q$.
Also: $S = S_1 + \frac{a_n}{b_m} \cdot X^{n-m}$, $R = R_1$ liefert die Ind.beh.

• Eindeutigkeit: Aus $P = S_1 Q + R_1$, $\deg R_1 < \deg Q$ und $P = S_2 Q + R_2$, $\deg R_2 < \deg Q$, folgt durch Differenzenbildung: $R_2 - R_1 = (S_1 - S_2) \cdot Q$. Wäre $S_1 - S_2 \neq 0$, folgte mit $\deg Q \leq \deg(R_2 - R_1) \leq \max(\deg R_2, \deg R_1)$ ein Widerspruch.
Also gilt doch $S_1 = S_2$ und damit auch $R_1 = R_2$. □

8.28 **Bsp.:** • Sei $P = X^4 - 5X^3 + 3X^2 - 10X + 2$ und $Q = X^2 - 5X + 1$.

Division mit Rest:

$$(X^4 - 5X^3 + 3X^2 - 10X + 2) : (X^2 - 5X + 1) = X^2 + 2$$

$\rightsquigarrow X^2 \cdot Q$: $\quad -(X^4 - 5X^3 + X^2)$

$2X^2 - 10X + 2$ ← soviele Summanden runternehmen, bis es soviele wie in $2 \cdot Q$ sind

$\rightsquigarrow 2 \cdot Q$: $\quad -(2X^2 - 10X + 2)$

0 ← Rest, Rechnung geht auf.

Also: $P = Q \cdot (X^2 + 2)$.

• Sei $P = X^3 + 1$, $Q = X - 1$. Dann: $(X^3 + 1) : (X - 1) = X^2 + X + 1 + \frac{2}{X-1}$

$X^2 \cdot Q$: $\quad -(X^3 - X^2)$

$X^2 + 1$

$X \cdot Q$: $\quad -(X^2 - X)$

$X + 1$

$1 \cdot Q$: $\quad -(X - 1)$

2 ← Rest $\neq 0$, Rechnung geht nicht auf

Also: $P = Q \cdot (X^2 + X + 1) + 2$.

Nullstellenabspaltung

8.29. **Def.:** Ein El. $x_0 \in K$ heißt **Nullstelle des Polynoms** $P \in K[X]$, wenn x_0 Nullstelle der zugeh. Polynomfkt. $K \to K$, $x \mapsto P(x)$ ist, also $P(x_0) = 0$ gilt.

8.30. **Kor.:** Genau dann ist x_0 Nullstelle eines Polynoms $P \in K[X]$, wenn es eine Faktorisierung $P = (X - x_0) \cdot S$ mit $S \in K[X]$ gibt.
d.h. Zerlegung in ein Produkt (von nichttrivialen Faktoren) — "Nullstellenabspaltung"

Bew.: Ist x_0 Nullstelle von P, so erhalten wir als Spezialfall von Satz 8.25 für P die Darstellung $P = S \cdot (X - x_0)$ mit $S \in K[X]$. Umgekehrt folgt aus dieser Darstellung unmittelbar, dass x_0 Nullstelle von P ist. $\square$

8.31. **Bem.:**
- Ein Polynom vom Grad $n \geq 0$ hat höchstens n p.w.v. (paarweise verschiedene) Nullstellen.
- Ist K unendlich, so gehören zu $P, Q \in K[X]$, $P \neq Q$, auch verschiedene Polynomfunktionen. Wäre nämlich $P(x) = Q(x)$ für alle $x \in K$, so hätte $P - Q$ unendl. viele Nullstellen.
- Nicht jedes Polynom besitzt eine Nullstelle, wie z.B. $X^2 + 1 \in \mathbb{R}[X]$. Als Polynom in $\mathbb{C}[X]$ aufgefasst hat es aber Nullstellen, nämlich $i, -i$.

Dies folgt aus 8.32:

8.32. **Fundamentalsatz der Algebra:** Jedes Polynom $P \in \mathbb{C}[X]$ vom Grad $\deg P \geq 1$ besitzt eine Nullstelle (in $\mathbb{C}$). [ohne Beweis, z.B. Funktionentheorie, Analysis]

Daraus folgt sofort:

8.33. **Kor.:** Jedes Polynom P über $\mathbb{C}$ mit $\deg P \geq 1$ zerfällt vollständig in Linearfaktoren, d.h. ist Produkt von Polynomen vom Grad 1.

8.34. **Bsp.:**
- $X^4 - 5X^3 + 3X^2 - 10X + 2 = (X^2 - 5X + 1) \cdot (X^2 + 2)$
  $= \left(X - \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{21}}{2}\right) \cdot \left(X - \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{21}}{2}\right) \cdot (X - i\sqrt{2}) \cdot (X + i\sqrt{2})$
- $X^3 - 2X^2 + X = X \cdot (X^2 - 2X + 1) = X \cdot (X - 1)^2$

8.35 Es ist möglich, $\mathbb{C}$ auch auf andere Weise zu konstruieren, beispielsweise so:
Sei $\mathbb{C} := \mathbb{R}[X]/_\sim$ mit den reellen Polynomen $\mathbb{R}[X] = \{\sum_{i=0}^{n} a_i X^i;\ n \in \mathbb{N}_0, a_i \in \mathbb{R}\}$
und der Ä-Relation $f(X) \sim g(X) :\Leftrightarrow \exists\, h(X) \in \mathbb{R}[X]:$
$$f(X) - g(X) = h(X) \cdot (X^2 + 1).$$
$\rightsquigarrow$ die Ä-Klassen sind El. von $\mathbb{C}$ und wir erklären $+, \cdot$ durch

$\otimes$
$$[f(X)] + [g(X)] := [f(X) + g(X)]$$
$$[f(X)] \cdot [g(X)] := [f(X) \cdot g(X)]$$
$\leftarrow$ deutlich natürlichere Def. als in 8.8!

Jede Klasse $[f(X)]$ enthält genau ein Polynom der Form $a_0 + a_1 X$
ist also durch ein Zahlenpaar (a_0, a_1) eindeutig bestimmt, die wieder auf Real- und Imaginärteil führen.

Beachten Sie:
$[X^2+1] = [0]$, und weiter ist
$$[X] \cdot [X] = [X^2] = [X^2+1-1] = [X^2+1] + [-1] = [-1],$$
d.h. $[X]$ ist eine Zahl mit $[X]^2 = [-1]$,
die würden wir ja wohl "i" nennen...

Mit der Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}[X]/_\sim$
$$(x, y) \mapsto [x + y \cdot X]$$
erhalten wir einen Körperisomorphismus, also "nichts Neues."

d.h. $\mathbb{C}$ als $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ wie in 8.8.–8.10. konstruiert