Vorlesung Lineare Algebra I

WiSe'19/'20 hhu
K. Halupczok

§6: Euklidische und unitäre Vektorräume

L26: Hauptachsentransformation

Stichworte: Hauptachsentransformation für normale Endos/Matrizen, 1. Spezialfall: selbstadj., 2. Spezialfall: unitär/orthogonal, Isometrie, (reelle) Normalform für orthogonale Endos/Matrizen

---

26.1. Ist V ein n-dim. unitärer Raum und $\tilde{f} \in \mathrm{End}(V)$ normal, so können wir $\tilde{f}$ über eine beliebig gewählte ONB $B = (v_1, \dots, v_n)$ durch eine normale Matrix A darstellen, d.h. mit $AA^* = A^*A$. Diese Matrix A definiert einen normalen Endomorphismus $f \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^n)$, wobei $\mathbb{C}^n$ mit dem Standard-S.P. versehen ist.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\tilde{f}} & V \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{C}^n & \xrightarrow{A} & \mathbb{C}^n \end{array} \qquad B \cong \quad \cong B$$

Nach Satz 25.9 besitzt dann der $\mathbb{C}^n$ eine ONB aus EVen $(x_1, \dots, x_n)$ im $\mathbb{C}^n$, für die gilt: $f(x_i) = Ax_i = \lambda_i x_i$, $i = 1, \dots, n$, für $\lambda_i \in \mathbb{C}$.
Jetzt bilden wir die Matrix $X := (x_1 | \dots | x_n)$, deren Spalten also diese EVen sind,
und $\Lambda := \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$.

Dann:

$$AX = A \cdot (x_1 | \dots | x_n) = (Ax_1 | \dots | Ax_n) = (\lambda_1 x_1 | \dots | \lambda_n x_n) = X \cdot \Lambda .$$

Da die Spalten von X eine ONB bilden, ist laut Satz 25.8 X eine unitäre Matrix, somit $X^{-1} = X^*$. Also folgt $X^{-1}AX = X^*AX = \Lambda$.
Dies zeigt:

26.2. Satz (Hauptachsentransformation für normale Endos/normale Matrizen):
Jede normale Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ lässt sich ähnlich auf Diagonalform transformieren: $X^{-1}AX = \Lambda$, wobei die Matrix X unitär gewählt werden kann und die Einträge $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ der Diagonalmatrix $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ genau aus den EWen von A besteht.

L26

-2-

Erster Spezialfall: Selbstadjungierte Endomorphismen

Laut Def. 25.5 heißt ein Endo f eines unitären Raumes selbstadjungiert ($K=\mathbb{C}$) bzw. symmetrisch ($K=\mathbb{R}$), wenn $f=f^*$ bzw. für Matrizen $A=A^*$ bzw. $A=A^T$ gilt. Solche Endos sind insb. normal, so dass die bisherigen Sätze gelten. Darüber hinaus gilt:

26.3 Satz (über selbstadj. Endos):

(1) Alle EWe eines selbstadj. Endos/Matrix sind reell.

(2) Für den Fall $K=\mathbb{R}$ (er ist in Satz 25.9 nicht erfasst) gilt:

"Hauptachsentransformation" für symmetrische Endos/Matrizen: Jede symmetrische (reelle) Matrix $A\in\mathbb{R}^{m\times m}$ besitzt eine ONB aus EVen in $\mathbb{R}^m$. Sie lässt sich mit einer (reellen) orthogonalen Matrix X auf Diagonalform Λ bringen: $X^{-1}AX = X^TAX = \Lambda$.

Bew.: Zu (1): Sei x ein EV zum EW λ des selbstadj. Endos f. Dann ist

$$\lambda\cdot\langle x,x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \langle f(x), x\rangle$$

$$= \langle x, f^*(x)\rangle = \langle x, f(x)\rangle = \langle x, \lambda x\rangle = \bar{\lambda}\langle x,x\rangle,$$

und da $\langle x,x\rangle \neq 0$ für $x\neq o$ folgt $\lambda=\bar{\lambda}$, d.h. $\lambda\in\mathbb{R}$.

Zu (2): Jede reelle symmetrische Matrix A definiert einen selbstadj. Endo f im $\mathbb{C}^m$. Zu diesem ex. eine ONB $(x_1,\dots,x_m)$ des $\mathbb{C}^m$ aus EVen zu reellen λ_i. Nun ist $x\neq o$ EV zum EW λ genau wenn $Ax-\lambda x=o$, d.h. $x\in\ker(A-\lambda I_m)\subseteq\mathbb{C}^m$. Somit gibt es genau $\dim\ker(A-\lambda I_m)$ viele unabh. EVen. Da $A\in\mathbb{R}^{m\times m}$ und $\lambda\in\mathbb{R}$ sind, können wir $\ker(A-\lambda I_m)$ in $\mathbb{R}^m$ bestimmen, der dieselbe Dimension hat. Folglich können wir auch eine ONB aus reellen EVen finden. □

26.4. Bsp.: • Sei $V=\mathcal{C}([0,1])$ der $\mathbb{R}$-VR der stetigen Funktionen $[0,1]\to\mathbb{R}$, versehen mit dem S.P. $\langle f,g\rangle=\int_0^1 f(t)g(t)\,dt$. Betr. den Endo $\Phi: V\to V$ mit $\Phi(f)(t):=t\cdot f(t)$ für alle $t\in[0,1]$. Dann ist Φ selbstadjungiert, da $\langle\Phi(f),g\rangle=\int t\,f(t)g(t)\,dt=\langle f,\Phi(g)\rangle$. Aber: f hat keine EWe (da $\mathcal{C}([0,1])$ unendl. dim., sonst würde 26.2 greifen), da $\lambda f(t)=\Phi(f)(t)=t f(t)$ ein ↯ für $f\neq o$ liefert.

• Die symmetrische Matrix $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$ hat die EWe -1 und 3, die Transformationsmatrix X mit $X=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$ erfüllt $X^{-1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}=X^T$, d.h. X ist orthogonal, und haben $X^{-1}AX=\begin{pmatrix}-1&0\\0&3\end{pmatrix}$.

Zweiter Spezialfall: Unitäre ($K=\mathbb{C}$) bzw. orthogonale ($K=\mathbb{R}$) Endomorphismen
Für diese gilt $f^* = f^{-1}$, d.h. $ff^* = f^*f = \mathrm{id}$.

26.5 Satz (über unitäre/orthogonale Endos): Sei V ein n-dim. unitärer Raum ($K\in\{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$), $f\in \mathrm{End}(V)$. Dann sind äquivalent:
(1) f ist unitär.
(2) Ist $(x_1,\dots,x_n)$ ONB, so auch $(f(x_1),\dots,f(x_n))$. ⌜f bildet bel. ONBs auf ONBs ab⌟
(3) Es gibt eine ONB $(x_1,\dots,x_n)$, so dass $(f(x_1),\dots,f(x_n))$ ONB.
(4) $\forall x\in V$: $\|f(x)\| = \|x\|$, d.h. f ist isometrisch bzw. längentreu.
(5) $\forall x\in V$: $\|x\|=1 \Rightarrow \|f(x)\|=1$.
(6) $\forall x,y\in V$: $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x,y\rangle$.

Bew.: (1)⇒(2): Ist f unitär, $(x_1,\dots,x_n)$ eine ONB, folgt $\langle f(x_i), f(x_j)\rangle = \langle x_i, \underbrace{f^*\circ f}_{=\mathrm{id}_V}(x_j)\rangle = \delta_{ij}$.
(2)⇒(3): Was in (2) für jede ONB behauptet wird, wird hier nur für eine gefordert.
(3)⇒(4): Sei $(x_1,\dots,x_n)$ und $(f(x_1),\dots,f(x_n))$ jeweils eine ONB. Für $x=\sum_{j=1}^m \alpha_j x_j \in V$ gilt dann
$$\|f(x)\|^2 = \langle \sum_i \alpha_i f(x_i), \sum_j \alpha_j f(x_j)\rangle = \sum_{i,j} \alpha_i\overline{\alpha_j}\langle f(x_i), f(x_j)\rangle = \sum_{i,j}\alpha_i\overline{\alpha_j}\delta_{ij}$$
$$= \sum_{i,j}\alpha_i\overline{\alpha_j}\langle x_i,x_j\rangle = \langle \sum_i \alpha_i x_i, \sum_j \alpha_j x_j\rangle = \langle x,x\rangle = \|x\|^2.$$
(4)⇒(5): $\|f(x)\| = \|x\| = 1 \Rightarrow \|f(x)\| = 1$ klar.
(5)⇒(4): Falls $x=0$, ist (4) klar. Ansonsten setze $z := \frac{1}{\|x\|}\cdot x$,
haben $\|z\| = \frac{\|x\|}{\|x\|} = 1 \overset{(5)}{\Rightarrow} 1 = \|f(z)\| = \|f(\frac{1}{\|x\|}\cdot x)\| = \|\frac{1}{\|x\|}\cdot f(x)\| = \frac{\|f(x)\|}{\|x\|}$.
(4)⇒(6): Für alle $x,y\in V$ gilt ⌜durch Nachrechnen⌟:
- im Fall $K=\mathbb{C}$: $\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2) = 4\langle x,y\rangle$,
- im Fall $K=\mathbb{R}$: $\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 4\langle x,y\rangle$.

Wenn f nach (4) Normen erhält, muss f also auch Skalarprodukte erhalten.
(6)⇒(1): Für alle $x,y\in V$ folgt aus (6): $\langle x,y\rangle = \langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, f^*\circ f(y)\rangle$,
also $\langle x, y - f^*\circ f(y)\rangle = 0$, also $y = f^*\circ f(y)$ für jedes y, und damit $f^*\circ f = \mathrm{id}_V$. Da V endl.dim., ist somit $f^* = f^{-1}$. ⌜surj.⇔inj.⇔bij., 13.17⌟ □

Wir übersetzen den Sachverhalt von Satz 26.5 auf Matrizen.

26.6. **Satz:** Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ oder $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Dann sind äquivalent:

(1) A ist unitär ($\mathbb{C}$), d.h. $A^* = A^{-1}$,
bzw. A ist orthogonal ($\mathbb{R}$), d.h. $A^T = A^{-1}$.

(2) Ist $(x_1, \dots, x_n)$ ONB, so auch $(Ax_1, \dots, Ax_n)$ (des $\mathbb{C}^n$ bzw. des $\mathbb{R}^n$).

(3) Die Spalten von A sind eine ONB (des $\mathbb{C}^n$ bzw. des $\mathbb{R}^n$).

(4) A ist isometrisch/längentreu, d.h. $\forall x: \|Ax\| = \|x\|$

(5) $\forall x: \|x\| = 1 \Rightarrow \|Ax\| = 1$.

(6) $\forall x, y: \langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$.

Bew.: Direkt aus Satz 26.5, bei (3) wurde die Einheitsvektorenbasis benutzt. □

26.7. **Bem.:** • (6) kann man auch als winkeltreu bezeichnen, wenn der Kosinussatz 23.7, d.h. $\langle x, y \rangle = \|x\|\|y\| \cos\varphi$ beachtet wird.

• Anstelle (3) kann man auch noch (3)⇔(7) sagen:

(7) Die Zeilen von A sind eine ONB.

⌈Denn die Zeilen von A sind die Spalten von A^T. Nun ist auch A^T unitär, da $(A^T)^* \cdot A^T = \bar{A} \cdot A^T = \overline{A\bar{A}^T} = \overline{AA^*} = \bar{I}_n = I_n$, jetzt (1)⇔(3) für A^T.⌋

• Auch noch: (8) Es gibt ONBen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ des $\mathbb{C}^n$ bzw. $\mathbb{R}^n$ mit $A = {}_{\mathcal{C}}[I_n]_{\mathcal{B}}$, ohne Beweis.
Aber wie gesagt, wir möchten dieselbe Basis haben, um ähnliche Matrizen zu betrachten...

26.8. **Def.:** Für $\dim V < \infty$ bilden die Isometrien $f: V \to V$ eine Untergruppe von $\mathrm{Aut}(V)$, die mit $O(V)$ bezeichnet wird. Die zugehörige Matrixgruppe heißt $O(n)$, orthogonale Gruppe. Matrizen daraus mit $\det A = 1$ bilden wieder eine UG, nämlich die spezielle orthogonale Gruppe $SO(n)$. Mit der allgemeinen linearen Gruppe $GL(n) := \{A \in K^{n\times n};\ \det A \neq 0\}$ bezeichnet die Gruppe der invertierbaren Matrizen.

$O(n) := \{A \in \mathbb{R}^{n\times n};\ A \text{ orthogonal}\} = \{A;\ A^T = A^{-1}\}$ orthogonale Gruppe

$U(n) := \{U \in \mathbb{C}^{n\times n};\ U \text{ unitär}\} = \{U;\ \overline{U}^T = U^{-1}\}$ unitäre Gruppe

$SO(n)$, $SU(n)$, $SL(n)$ sind die UG von $O(n)$, $U(n)$, $GL(n)$ mit $\det = +1$ (und heißen spezielle ... Gruppe).

26.9. **Bem.:** Isometrien mit $\det A = 1$ heißen Drehungen,
die mit $\det A = -1$ heißen Drehspiegelungen.

Zuletzt bringen wir eine beliebige orthogonale Matrix mit einer ONB auf einfache <u>Normalform</u>, so dass wir eine klare geometrische Interpretation erhalten.

26.10 <u>Satz</u>: Zu jeder orthogonalen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (d.h. mit $A^T = A^{-1}$) gibt es eine ONB $(x_1, \dots, x_n)$ des $\mathbb{R}^n$, bezüglich der A die folgende Gestalt hat:

$$X^* A X = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & -1 & \\ & & & & & & R_1 \\ 0 & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & R_s \end{pmatrix},$$

wobei $X = (x_1 | \dots | x_n)$ aus den x_i als Spalten gebildet wird (so dass $X^* = X^{-1}$, beachte $X^* = X^T$), und die R_j, $j = 1, \dots, s$, Drehmatrizen der Form

$$R_j = \begin{pmatrix} \cos\varphi_j & -\sin\varphi_j \\ \sin\varphi_j & \cos\varphi_j \end{pmatrix}, \quad \varphi_j \in \mathbb{R}, \text{ sind.}$$

Somit bewirkt eine durch eine orthogonale Matrix beschriebene lineare Abb. folgendes:

diese UVRe müssen nicht alle existieren

1. Auf einem UVR, dem Eigenraum zum EW $+1$, wirkt f als <u>Identität</u>,
2. auf einem weiteren UVR, dem Eigenraum zu -1, wirkt f als <u>Spiegelung</u>,
3. auf weiteren 2-dimensionalen UVRen wirkt f als <u>ebene Drehung</u>.

Alle diese Räume sind paarweise orthogonal und spannen ganz $\mathbb{R}^n$ auf.

<u>Bew.</u>: Der Endo $f: x \mapsto Ax$ des $\mathbb{C}^n$ ist unitär, besitzt also eine Basis aus EVen zu EWen, die alle Betrag 1 haben (vgl. <u>25.9</u>, <u>25.8</u>, <u>26.5</u>: $f(x) = \lambda x \Rightarrow |\lambda| \cdot \|x\| = \|\lambda x\| = \|f(x)\| = \|x\| \Rightarrow |\lambda| = 1$).

- Für reelle EWe, also $+1$ oder -1, können wir auf reelle EVen schließen, genau wie in <u>26.3 (2)</u> bei symmetrischen Matrizen.
- Echt komplexe EWe vom Betrag 1 haben die Form $\lambda = e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ $(\neq \pm 1)$. $\varphi \notin \pi\mathbb{Z}$

Bestimme deren EVen: Sei $\underline{x = u - iv}$ mit $u, v \in \mathbb{R}^n$ ein EV zum EW $\lambda = e^{i\varphi} \neq \pm 1$.

Dann ist $$Ax = Au - iAv = e^{i\varphi}(u - iv) = (\cos\varphi + i\sin\varphi)(u - iv)$$
$$= (u\cos\varphi + v\sin\varphi) - i(-u\sin\varphi + v\cos\varphi),$$

durch Vergleich von Real- und Imaginärteil also

$$Au = u\cos\varphi + v\sin\varphi, \quad Av = -u\sin\varphi + v\cos\varphi.$$

Dann gilt für $\underline{\bar{x} = u + iv}$:

$$A\bar{x} = Au + iAv = (u\cos\varphi + v\sin\varphi) + i(-u\sin\varphi + v\cos\varphi)$$
$$= (\cos\varphi - i\sin\varphi)\cdot(u + iv) = e^{-i\varphi} \cdot A\bar{x},$$

$$\left\{\begin{array}{l} u + iv = \bar{x} \\ u - iv = x \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} u = \frac{x + \bar{x}}{2} \\ v = \frac{\bar{x} - x}{2i} \end{array}\right\}$$

$\boxtimes$

also ist $\bar{x}$ EV zum EW $e^{-i\varphi}$ von A, und da $e^{i\varphi} \neq e^{-i\varphi}$ für $\varphi \notin \mathbb{Z}\pi$, sind somit x und $\bar{x}$ orthogonal nach <u>25.11 (4)</u>.

Folglich ist $0 = \langle x, \bar{x} \rangle = \langle u - iv, u + iv \rangle = \langle u, u \rangle - i \langle v, u \rangle - i \langle u, v \rangle - \langle v, v \rangle$, wobei alle S.P.e der u und v reell sind, also ist $\langle u, v \rangle = -\langle v, u \rangle = -\langle u, v \rangle$. Damit ist $\langle u, v \rangle = 0$, d.h. $u \perp v$ und $\langle u, u \rangle = \langle v, v \rangle$, d.h. $\|u\| = \|v\|$. Schließlich können wir noch so normieren, dass $\|u\| = \|v\| = 1$ ist.

- Damit folgt: Zu jedem EW $e^{i\varphi} \neq \pm 1$ ist auch $e^{-i\varphi}$ EW, und zu jedem solchen Paar gibt es Vektoren $u, v \in \mathbb{R}^n$, $\|u\| = \|v\| = 1$, $\langle u, v \rangle = 0$ so, dass $Au = u \cos\varphi + v \sin\varphi$, $Av = -u \sin\varphi + v \cos\varphi$,
d.h.
$$A \cdot (u | v) = (u | v) \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

- Nun kann man folgendermaßen eine ONB $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$ zu A gewinnen. Wähle zunächst eine beliebige orthogonale Basis $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ aus EVen zu A, die wir so anordnen, dass zunächst die zum EW $+1$ (falls vorhanden), dann die zum EW -1 (falls vorhanden) kommen, schließlich die zu echt komplexen EWen $e^{i\varphi_j} \neq \pm 1$ (falls vorhanden). Dazu wählen wir die passenden EVen zu $+1, -1$, und die EVen zu $e^{i\varphi_j} \neq \pm 1$ so, dass diese zu Paaren der Form $x_j, \overline{x_j}$ auftreten, wir haben ja gesehen, dass $\overline{x_j}$ zu $e^{-i\varphi_j}$ gehört. Jedes solche Paar können wir durch das oben (in $\boxtimes$) konstruierte Paar u_j, v_j reeller Vektoren ersetzen. Wegen $L(u_j, v_j) = L(x_j, \overline{x_j})$ und der Konstruktion erhält man eine ONB und die gewünschte Darstellung von A. $\square$

26.11. **Bsp.:** Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sei $A := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \alpha & 1-\beta & -\alpha & 1+\beta \\ 1+\beta & \alpha & 1-\beta & -\alpha \\ -\alpha & 1+\beta & \alpha & 1-\beta \\ 1-\beta & -\alpha & 1+\beta & \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ (Spalten von A sind p.w. orthogonal).

Dies als Abb. $\mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$, $z \mapsto Az$ betrachtet ergibt die EWe $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = \alpha - i\beta$, $\lambda_4 = \overline{\lambda_3} = \alpha + i\beta$ mit zugeh. EVen $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $x_3 = \begin{pmatrix} 1-i \\ 1+i \\ -1+i \\ -1-i \end{pmatrix}$, $\overline{x_3} = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \\ -1-i \\ -1+i \end{pmatrix}$.

Nach Satz 26.10 haben wir, um zur reellen Normalform zu kommen, die Vektoren x_1, x_2, $u_3 := \frac{1}{2}(x_3 + \overline{x_3})$, $v_3 := \frac{1}{2i}(x_3 - \overline{x_3})$ zu bilden ($\boxtimes$), also $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, die ein OS bilden $\rightsquigarrow X^* A X = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & \alpha & -\beta \\ & & \beta & \alpha \end{pmatrix}$, $X = \frac{1}{2}(x_1 | x_2 | u_3 | v_3)$.
Ist $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, ist die 2×2-Matrix $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ eine Drehung.

26.12. Bsp.: Wie in Bsp. 25.13 betr. $W = \mathcal{C}([0,2\pi])$ und $V \subseteq W$ darin wie dort, versehen mit dem S.P. $\langle f,g\rangle := \int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}\,dt$ für $f,g \in V$.
Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist der Endo $T_k : V \to V$, $f(t) \mapsto e^{ikt} f(t)$ ein unitärer Endo, denn $\forall f,g \in V$:

$$\langle T_k(f), T_k(g)\rangle = \int_0^{2\pi} e^{ikt} f(t)\cdot \overline{e^{ikt} g(t)}\,dt = \int_0^{2\pi} e^{ikt} f(t) e^{-ikt}\overline{g(t)}\,dt$$
$$= \int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}\,dt = \langle f,g\rangle,$$

d.h. 26.5.(6) gilt; der dortige Beweis von "26.5(6) $\Rightarrow$ unitär" ist auch in ∞-dimensionalen unitären Räumen richtig, da er ohne Basiswahl auskommt.

26.13 Die in 26.8 def. Gruppen sind auch wirklich welche: die dort erklärten Teilmengen von $Gl(n)$ sind abgeschlossen bzgl. Multiplikation und Inversenbildung.
So ist z.B. das Produkt orthogonaler Matrizen wieder orthogonal.
⌜Aus $A^T A = I_n$ und $B^T B = I_n$ folgt $(AB)^T(AB) = B^T A^T A B = B^T B = I_n$.⌟

26.14. Bsp. für eine Hauptachsentransformation einer symmetrischen Matrix laut 26.3:
Geg. sei $A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5 & -1 & \sqrt2 \\ -1 & 5 & -\sqrt2 \\ \sqrt2 & -\sqrt2 & 6 \end{pmatrix}$, ist symmetrisch: $A^T = A$ ✓.
Bestimme EWe:

$$\det(A - T I_3) = \frac{1}{4^3}\det(4A - 4T\cdot I_3) = \frac{1}{64}\det\begin{pmatrix} 5-4T & -1 & \sqrt2 \\ -1 & 5-4T & -\sqrt2 \\ \sqrt2 & -\sqrt2 & 6-4T \end{pmatrix} = \dots$$
$$= \frac{1}{64}(-64T^3 + 256T^2 - 320T + 128) = 0 \iff (T-1)^2(T-2) = 0.$$

$\to \lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, EVen zu $\lambda_1 = 1$ sind $\underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}}_{x_1}, \underbrace{\begin{pmatrix}-1\\1\\\sqrt2\end{pmatrix}}_{x_2}$, zu $\lambda_2 = 2$ ist $\underbrace{\begin{pmatrix}\sqrt2\\-\sqrt2\\2\end{pmatrix}}_{x_3}$.
Normierung $\rightsquigarrow X = \underbrace{\frac{1}{2\sqrt2}\begin{pmatrix} 2 & -\sqrt2 & \sqrt2 \\ 2 & \sqrt2 & -\sqrt2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}}_{\text{ONB aus EVen}}$. Dann gilt $X^T A X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

26.15. Bsp. für eine Hauptachsentransformation einer orthogonalen Matrix laut 26.10:
Betr. $A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, ist orthogonal, da Spalten eine ONB des $\mathbb{R}^2$ bilden.
EWe ausrechnen: $\det(A - T I_2) = \frac{1}{25}\det\begin{pmatrix} -3-5T & 4 \\ 4 & 3-5T \end{pmatrix} = \frac{1}{25}\left((5T)^2 - 9 - 16\right) = T^2 - 1$
$= (T-1)(T+1)$, also $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ sind die EWe. Die EVen sind
$x_1 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ $\rightsquigarrow$ mit $X = \frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ist $X^T A X = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
$= \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & -5 \end{pmatrix} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & -25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\leftarrow$ Spiegelung an "x-Achse"