Vorlesung Lineare Algebra I

WiSe'19/'20 hhu
K. Halupczok

§6: Euklidische und unitäre Vektorräume
L25: Normale Endomorphismen

Stichworte: hermitesch adjungierter Homomorphismus, normal/unitär/orthogonal/selbstadjungiert/symmetrisch, Spalten einer unitären Matrix sind ONB, EVen zu versch. EWen eines normalen f sind orthogonal

---

25.1. Haben in 24.11 für eine Matrix $A \in K^{m\times n}$ die adjungierte Matrix $A^* := \bar{A}^T \in K^{n\times m}$ definiert. Bekanntlich liefert jede Matrix A über $f: x \mapsto Ax$ eine lineare Abb. $f \in \mathrm{Hom}(K^n, K^m)$. Insbesondere liefert die zu A adjungierte Matrix $A^* \in K^{n\times m}$ über $f^*: y \mapsto A^*y$ eine lin. Abb. $f^* \in \mathrm{Hom}(K^m, K^n)$.

⌜Bem.: Schreibweise "oben $*$" hat nichts mit dem Dualräumen aus L15 zu tun. Zur Vermeidung von Missverständnissen wird manchmal f^{ad}, A^{ad} statt f^*, A^* geschrieben.⌟

Den Zusammenhang zwischen f und f^* untersuchen wir nun genauer. Es seien mit $\langle\cdot,\cdot\rangle_m$ und $\langle\cdot,\cdot\rangle_n$ die Standard-S.P.e in $\mathbb{C}^m$ bzw. $\mathbb{C}^n$ bezeichnet. Dann gilt:

Für $x = \begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots \\ \xi_n\end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix}\eta_1\\ \vdots \\ \eta_m\end{pmatrix}$, $A = (\alpha_{ij})_{m,n}$ ist

$$\langle Ax, y\rangle_m = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n \alpha_{ij}\xi_j\right)\overline{\eta_i} = \sum_{j=1}^n \xi_j \overline{\left(\sum_{i=1}^m \overline{\alpha_{ij}}\,\eta_i\right)} = \langle x, A^*y\rangle_n .$$

Mit f bzw. f^* geschrieben heißt dies, dass $\langle f(x), y\rangle_m = \langle x, f^*(y)\rangle_n$ für alle $x \in \mathbb{C}^n$, $y \in \mathbb{C}^m$ gilt. Wir verallgemeinern dies wie folgt:

25.2. Satz und Def. (hermitesch adjungierter Homomorphismus):
Seien U, V zwei endl. dim. K-VRe, $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, mit Skalarprodukten $\langle\cdot,\cdot\rangle_U$, $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$. Sei $f \in \mathrm{Hom}(U,V)$. Dann gibt es genau eine lineare Abb. $f^* \in \mathrm{Hom}(V,U)$, so dass für alle $u \in U$, $v \in V$ gilt: $\langle f(u), v\rangle_V = \langle u, f^*(v)\rangle_U$.

f^* heißt der zu f (hermitesch) adjungierte Homomorphismus / (hermitesch) adjungierte lineare Abb.

<u>Bew.:</u> <u>Ex.:</u> Seien $(u_1,\dots,u_n)$, $(v_1,\dots,v_m)$ ONBen in U bzw. V, für $j=1,\dots,n$ sei $f(u_j)=\sum_{i=1}^m \eta_{ij} v_i$. Dann ist $A:=(\eta_{ij})\in K^{m\times n}$ die Matrixdarst. von f. Wir bilden dazu $A^*:=(\overline{\eta_{ji}})\in K^{n\times m}$, die adjungierte Matrix und definieren $f^*\in \mathrm{Hom}(V,U)$ durch $f^*(v_i):=\sum_{j=1}^n \overline{\eta_{ij}}\, u_j$, $i=1,\dots,m$.
Dann ist für bel. Basiselemente u_k, v_l:

$$\circledast \begin{cases} \langle f(u_k), v_l\rangle = \langle \sum_{i=1}^m \eta_{ik} v_i, v_l\rangle = \sum_{i=1}^m \eta_{ik} \underbrace{\langle v_i, v_l\rangle}_{=\delta_{i,l}} = \eta_{lk}, \quad \text{und} \\ \langle u_k, f^*(v_l)\rangle = \langle u_k, \sum_{j=1}^n \overline{\eta_{lj}}\, u_j\rangle = \sum_{j=1}^n \eta_{lj} \underbrace{\langle u_k, u_j\rangle}_{=\delta_{k,j}} = \eta_{lk}. \end{cases}$$

Damit ist für $u=\sum_{k=1}^n \alpha_k u_k$, $v=\sum_{l=1}^m \beta_l v_l$:

$$\langle f(u), v\rangle = \langle \sum_{k=1}^n \alpha_k f(u_k), \sum_{l=1}^m \beta_l v_l\rangle = \sum_{k,l} \alpha_k \overline{\beta_l} \langle f(u_k), v_l\rangle$$

$$\overset{\circledast}{=} \sum_{k,l} \alpha_k \overline{\beta_l} \langle u_k, f^*(v_l)\rangle = \langle \sum_{k=1}^n \alpha_k u_k, \sum_{l=1}^m \beta_l f^*(v_l)\rangle = \langle u, f^*(v)\rangle$$

Also ist $f^*\in \mathrm{Hom}(V,U)$ eine lin. Abb. mit der gewünschten Eigenschaft.
<u>Eindeutigkeit</u>: Gilt für $\tilde f\in \mathrm{Hom}(V,U)$ ebenfalls $\langle f(u),v\rangle = \langle u, \tilde f(v)\rangle$ für alle u,v, so ist für alle u,v: $0=\langle u, f^*(v)\rangle - \langle u, \tilde f(v)\rangle = \langle u, f^*(v)-\tilde f(v)\rangle$.
Sei $v\in V$ beliebig. Dann ist $u':=f^*(v)-\tilde f(v)\in U$, also
$0=\langle u', f^*(v)-\tilde f(v)\rangle = \langle f^*(v)-\tilde f(v), f^*(v)-\tilde f(v)\rangle = \|f^*(v)-\tilde f(v)\|^2$.
Somit ist $f^*(v)=\tilde f(v)$, und da v beliebig, folgt $\tilde f = f^*$. $\square$

Der Beweis zeigt uns noch mehr:

25.3. <u>Satz</u>: Sind U,V endl. dim. unitäre VRe, $f\in \mathrm{Hom}(U,V)$, $f^*\in \mathrm{Hom}(V,U)$ die adjungierte lin. Abb. Sind dann $\mathcal{B}$ bzw. $\mathcal{C}$ ONBen in U bzw. V, so ist die Matrixdarst. A^* von f^* bzgl. $\mathcal{C},\mathcal{B}$ die adjungierte Matrix zur Matrixdarst. A von f bzgl. $\mathcal{B},\mathcal{C}$.
D.h.: $A={}_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{B}} \Leftrightarrow A^*={}_{\mathcal{B}}[f^*]_{\mathcal{C}}$.

Im Diagramm:
$$\begin{tikzcd} \mathcal{B} \subseteq U \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[d, "K_{\mathcal{B}}"] & V \supseteq \mathcal{C} \arrow[l, shift left, "f^*"] \arrow[d, "K_{\mathcal{C}}"] \\ K^n \arrow[r, shift left, "A"] & K^m \arrow[l, shift left, "A^*"] \end{tikzcd}$$

⚠ $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ sind ONBen

25.4. Betrachten im folgenden Endomorphismen $f \in End(V) = Hom(V, V)$ eines unitären Raumes V, insb. deren EWe und EVen. Wir beschränken uns dabei auf sogenannte normale Endomorphismen, die deshalb interessant sind, weil ihre Eigenwerttheorie relativ übersichtlich ist, und weil die meisten Endomorphismen, die in Anwendungen vorkommen (etwa Quantenmechanik) normal sind. Ab jetzt: $U = V$.

↳ Endo = "operator", Skalarprodukt $\langle x, y \rangle$ = "$\langle x | y \rangle$"

25.5. Def.: Sei V ein unitärer Raum, $f \in End(V)$, $f^* \in End(V)$ sein adjungierter. Dann heißt f normal (bzw. normaler Endo), falls $f^* \circ f = f \circ f^*$ gilt.

- Ist sogar $f^* \circ f = f \circ f^* = id_V$, d.h. $f^* = f^{-1}$, so heißt f unitär (im Fall $K = \mathbb{R}$ auch orthogonal).
- Ist sogar $f = f^*$, so heißt f selbstadjungiert oder hermitesch (im Fall $K = \mathbb{R}$ auch symmetrisch).

25.6. Satz: Sei V ein unitärer Raum, $f \in End(V)$, $f^* \in End(V)$ sein adjungierter, $n = \dim V$. Geht man mit einer ONB $\mathcal{B}$ in V zur Matrixdarst. $A = {}_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{B}}$ über, so gilt:

(i) f normal $\Leftrightarrow A^* A = A A^*$

(ii) f unitär $\Leftrightarrow A^* A = A A^* = I_n$, d.h. $A^* = A^{-1}$,

(iii) f selbstadjungiert $\Leftrightarrow A = A^*$.

Bew.: Klar mit Satz 25.4 anhand der Def. 25.5. □

25.7. Def.: Eine Matrix A wie in (i), d.h. $A^* A = A A^*$, heißt normal,

" wie in (ii), d.h. $A^* = A^{-1}$, heißt unitär,

" $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ wie in (ii), d.h. $A^T = A^{-1}$, heißt orthogonal,

" wie in (iii), d.h. $A^* = A$, heißt selbstadjungiert,

" $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ wie in (iii), d.h. $A^T = A$, heißt symmetrisch.

25.8. **Satz** (zu orthogonalen/unitären Matrizen):
Sei $A \in K^{n\times n}$ eine Matrix, deren Spalten eine ONB des K^n bzgl. dem Standard-S.P. bilden. Diese ist unitär (bzw. im Fall $K=\mathbb{R}$ orthogonal) und $|\det A| = 1$, d.h. für $K=\mathbb{R}$ ist $\det A \in \{1,-1\}$, für $K=\mathbb{C}$ ist $\det A \in \{z \in \mathbb{C};\ |z|=1\}$.
Umgekehrt bilden die Spalten einer unitären Matrix eine ONB des K^n.

$A^* v = \begin{pmatrix} \langle v, a_1\rangle \\ \vdots \\ \langle v, a_n\rangle \end{pmatrix}$

Bew.: • A ist invertierbar, da die Spalten eine Basis bilden. Seien $a_1, \dots, a_n$ diese Spalten.
Haben wegen Formel vor ⊗ in 24.12: $A^* \cdot A = (\langle a_i, a_j\rangle)_{i,j} = (\delta_{ij})_{ij} = I_n$,
also ist $A^* = A^{-1}$, d.h. A ist unitär.
Weiter ist $1 = \det I_n = \det(A^* A) = \det(A^*) \det A = \overline{\det A^T} \cdot \det A$
$= \overline{\det A} \cdot \det A = |\det A|^2$, also $|\det A| = 1$.
Ist umgekehrt A unitär, sind die Spalten orthogonal: $(\langle a_i, a_j\rangle)_{i,j} = A^* A = I_n = (\delta_{ij})_{ij}$.
Bem.: ist $|\det A| = 1$, muss A nicht unitär sein, z.B. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5\end{pmatrix}$. □

Unser Ziel ist jetzt, das folgende Hauptergebnis zu beweisen:

25.9. **Satz** (zu normalen Endos über $K=\mathbb{C}$): Sei V ein komplexer unitärer Raum (d.h. $K=\mathbb{C}$), $n = \dim V$, $f \in \mathrm{End}(V)$. Dann gilt:

normale Endos sind spezielle diag'bare Endos

f normal $\Leftrightarrow$ V besitzt eine ONB aus Eigenvektoren von f.

Bew. von „⇐": 1. Beh.: Ist $(x_1, \dots, x_n)$ eine ONB aus EVen zu f, also $f(x_i) = \lambda_i x_i$ für $i = 1, \dots, n$, so sind diese x_i auch EVen zu f^*, und zwar zu den konjugiert komplexen EWen: $f^*(x_i) = \overline{\lambda_i}\, x_i$ für $i = 1, \dots, n$.
⌈Denn $\forall i,j$: $\langle x_j, f^*(x_i) - \overline{\lambda_i} x_i\rangle = \langle f(x_j), x_i\rangle - \lambda_i \langle x_j, x_i\rangle$
$= \lambda_j \langle x_j, x_i\rangle - \lambda_i \langle x_j, x_i\rangle = (\lambda_j - \lambda_i)\langle x_j, x_i\rangle = 0$,
denn für $i=j$ ist $\lambda_i - \lambda_j = 0$, für $i \neq j$ ist $\langle x_j, x_i\rangle = 0$ wegen Orthogonalität.
Da die (x_i) eine Basis bilden, ist somit $f^*(x_i) - \overline{\lambda_i} x_i = 0$, also $f^*(x_i) = \overline{\lambda_i}\, x_i$.⌋
2. f normal: Denn $f^* \circ f(x_i) = f^*(\lambda_i x_i) = \lambda_i f^*(x_i) = \lambda_i \overline{\lambda_i} x_i = |\lambda_i|^2 x_i$,
und $f \circ f^*(x_i) = f(\overline{\lambda_i} x_i) = f(\overline{\lambda_i} x_i) = \overline{\lambda_i} f(x_i) = \overline{\lambda_i} \lambda_i x_i = |\lambda_i|^2 x_i$,
und da die (x_i) eine Basis bilden, ist $f^* \circ f = f \circ f^*$. □

25.10. **Bem.:** Der Beweis zeigt darüberhinaus, dass die x_i auch EVen von $f^* \circ f$ $(= f \circ f^*)$ sind zu den EWen $|\lambda_i|^2$, die also sämtlich reell und ≥ 0 sind.

Zum Beweis von „$\Rightarrow$" benötigen wir noch folgendes Zwischenresultat.

25.11. **Satz:** Sei $f \in \mathrm{End}(V)$ normal, $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann gelten:

(1) $\ker f = \ker f^*$

(2) $(f - \lambda\, id_V)^* = f^* - \bar\lambda\, id_V$, und $f - \lambda\, id_V$ ist normal,

(3) Es ist: $f(x) = \lambda x \Leftrightarrow f^*(x) = \bar\lambda x$,

(4) EVen zu verschiedenen EWen von f sind orthogonal.

Bew.: (1): $\langle f(x), f(x)\rangle \underset{25.2}{=} \langle x, f^* \circ f(x)\rangle = \langle x, f \circ f^*(x)\rangle \underset{25.2}{=} \langle f^*(x), f^*(x)\rangle$,
somit ist $f(x) = 0 \Leftrightarrow f^*(x) = 0$.

(2): Für alle $x, y \in V$ ist $\langle (f - \lambda\, id_V)(x), y\rangle = \langle f(x), y\rangle - \lambda \langle x, y\rangle$
$\underset{25.2}{=} \langle x, f^*(y)\rangle - \langle x, \bar\lambda y\rangle = \langle x, (f^* - \bar\lambda\, id_V)(y)\rangle$.

Weiter: $(f - \lambda id_V) \circ (f - \lambda id_V)^* = f \circ (f - \lambda id_V)^* - \lambda \cdot (f - \lambda id_V)^*$
$= f \circ (f^* - \bar\lambda\, id_V) - \lambda \cdot (f^* - \bar\lambda\, id_V) = f^* \circ f - \bar\lambda f - \lambda f^* + \lambda\bar\lambda\, id_V$
$= (f - \lambda id_V)^* \circ (f - \lambda id_V)$.

(3): Folgt aus (1) und (2), (4): Seien $\lambda \neq \lambda'$ EWe von f zu EVen x, x'.
Dann: $\lambda \langle x, x'\rangle = \langle \lambda x, x'\rangle = \langle f(x), x'\rangle = \langle x, f^*(x')\rangle = \langle x, \overline{\lambda'} \cdot x'\rangle$
$= \lambda' \cdot \langle x, x'\rangle$, d.h. $(\lambda - \lambda') \cdot \langle x, x'\rangle = 0$. Da $\lambda \neq \lambda'$ muss $\langle x, x'\rangle = 0$ sein. $\square$

25.12 **Bew. von 25.9. „$\Rightarrow$":** $f \in \mathrm{End}(V)$, $\dim V = n$, mit $K = \mathbb{C}$, besitzt mind. einen EW λ nach 20.27. Dann: $x \neq 0$ ist ein EV zu $\lambda \Leftrightarrow x \in \ker(f - \lambda id_V)$.
Es sei $E(f; \lambda) := \ker(f - \lambda\, id_V)$ der Eigenraum von f zu λ.
Dies ist ein endl. dim. UVR von V, der somit eine ONB besitzt.
Betrachten wir nun sämtliche (höchstens $\dim V = n$ viele) Eigenräume zu den verschiedenen EWen von f und wählen für jeden eine ONB.
$\rightsquigarrow$ Zusammengenommen ergeben diese ein ONS $(x_1, \dots, x_m)$ in V.
⌜Denn laut Konstruktion sind die x_i sämtlich normiert. Gehören zwei zu demselben EW, sind sie laut Konstruktion orthogonal, gehören sie zu versch. EWen, folgt dies aus Satz 25.11. (4).⌟
Wir setzen $U := L(x_1, \dots, x_m)$, und es genügt, z.z.: $U = V$, womit dann eine ONB aus EVen gefunden ist. Klar: $U \subseteq V$.

Zeigen zunächst: $u \in U \Rightarrow f(u) \in U$, $f^*(u) \in U$.

⌈Denn für $u \in U$ ist $u = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i$, und da die x_i EVen zu EWen λ_i sind,
gilt $f(u) = \sum \alpha_i f(x_i) = \sum \alpha_i \lambda_i x_i \in L(x_1, \ldots, x_m) = U$,
und $f^*(u) = \sum \alpha_i f^*(x_i) = \sum \alpha_i \bar{\lambda}_i x_i \in L(x_1, \ldots, x_m) = U$.⌋ (nach 25.11.(3))

Ann.: $U \subsetneq V$, dann bilden wir das orthogonale Komplement $U^\perp$,
so dass $V = U \oplus U^\perp$. Dann hat jedes $v \in V$ eine eind. Darstellung
als $v = u + w$ mit $u \in U$, $w \in U^\perp$, wobei stets $\langle u, w \rangle = 0$ ist.

Damit folgt: Für $w \in U^\perp$ ist auch $f(w) \in U^\perp$.

⌈Denn für jedes $u \in U$ gilt $\langle u, f(w) \rangle = \langle f^*(u), w \rangle = 0$, da $f^*(u) \in U$, $w \in U^\perp$.
Somit ist $f(w) \perp u$ für alle $u \in U$, d.h. $f(w) \in U^\perp$.⌋

Somit ist $f: U^\perp \to U^\perp$, d.h. $f_{|U^\perp} \in \mathrm{End}(U^\perp)$.
Nun ist $\mathrm{End}(U^\perp) \neq 0$ ein komplexer VR, somit hat $f_{|U^\perp}$ einen
EW λ_0 mit einem EV $x_0 \in U^\perp$, d.h. $f_{|U^\perp}(x_0) = \lambda_0 x_0$.
Dann ist aber auch λ_0 ein EW von f und x_0 EV von f.
Nach Konstruktion von U ist somit $x_0 \in U$. Also ist $x_0 \in U^\perp \cap U = \{0\}$,
d.h. $x_0 = 0$, was unmöglich ist, da x_0 ein EV ist, ↯. □

25.13. Bsp.: $W = \mathcal{C}([0, 2\pi])$, betr. $V \subseteq W$, wo alle f bel. oft diff'bar und deren
Ableitungen alle $f^{(m)}(0) = f^{(m)}(2\pi)$, $m = 0, 1, 2, \ldots$ erfüllen.
z.B. sind $\sin kx$, $\cos kx \in V$ für jedes $k \in \mathbb{Z}$.
Haben in U das S.P. $\langle f, g \rangle := \int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}\,dt$.
Betr. den Ableitungsendomorphismus

$$\tilde{D}: f(t) \mapsto \frac{df}{dt}(t) = f'(t).$$

Dieser Endo $\hat{D}$ ist normal: Durch partielle Integration folgt

$$\langle \hat{D}f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f'(t)\overline{g(t)}\,dt = f(2\pi)\overline{g(2\pi)} - f(0)\overline{g(0)} - \int_0^{2\pi} f(t)\overline{g'(t)}\,dt$$
$$= -\langle f, \hat{D}g \rangle = \langle f, -\hat{D}g \rangle,$$

also ist $\hat{D}^* = -\tilde{D}$ und somit $\hat{D}\hat{D}^* = -\hat{D}\hat{D} = \hat{D}^*\hat{D}$ ($\hat{D}$ ist antiselbstadj.).

Der Endo $D := i\tilde{D}$, $f \mapsto if'$ ist hingegen selbstadjungiert;
Jedes $k \in \mathbb{Z}$ ist ein EW mit EV $f_k(t) := e^{ikt}$.

Die $(f_k(t))_{k\in\mathbb{N}}$ bilden ein OS in V:

Wir haben $\langle f_k, f_\ell\rangle = \int_0^{2\pi} e^{ikt}\cdot\overline{e^{i\ell t}}\,dt = \int_0^{2\pi} e^{i(k-\ell)t}\,dt$

$$= \begin{cases} \int_0^{2\pi} 1\,dt, & k=\ell \\ \frac{e^{i(k-\ell)}}{i(k-\ell)}\Big|_0^{2\pi}, & k\neq\ell \end{cases} = \begin{cases} 2\pi, & k=\ell \\ \frac{e^{2\pi i(k-\ell)}-e^0}{i(k-\ell)} = \frac{1-1}{\dots} = 0, & k\neq\ell. \end{cases}$$

Die Familie $\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikt}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ bildet ein ONS in V.

Auch Basis? D.h. erzeugt diese Familie V? Nicht klar. Da V ∞-dimensional, greift Satz 25.9 hier nicht! $\rightsquigarrow$ "Fourier-Analysis".

25.14 Bsp.: Ein paar konkrete Matrizen:

- unitäre Matrix: $A = \underbrace{\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1\end{pmatrix}}_{\text{Spalten sind ONB} ✓} \rightsquigarrow$ Inverse: $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\cdot\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1 & i\\ -1 & i\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt2\cdot\frac12\cdot 2i}\begin{pmatrix}1 & i\\ -1 & i\end{pmatrix}$
  $= \frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1/i & 1\\ -1/i & 1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}-i & 1\\ i & 1\end{pmatrix} = \overline{A}^T = A^*$ ✓
- orthogonale Matrix: $A = \underbrace{\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}}_{\text{Spalten sind ONB} ✓} \rightsquigarrow$ Inverse: $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\cdot\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix} = \frac{1}{\frac12\cdot 2\sqrt2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix} = A^T$ ✓
  Und: $A = D_{\pi/4}$, ist Drehmatrix
- symmetrische Matrix: $A = \begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix} \rightsquigarrow A^T = A \rightarrow \langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$ im $\mathbb{R}^2$
- selbstadjungierte Matrix: $A = \begin{pmatrix}3 & 1+2i\\ 1-2i & 4\end{pmatrix} \rightsquigarrow A^* = A \rightarrow \langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$ im $\mathbb{C}^2$
- A^*A ist stets selbstadjungiert: $(A^*A)^* = A^*A^{**} = A^*A$ ✓
- Rechnen mit A^*: $(AB)^* = B^*A^*$ wegen $(AB)^T = B^TA^T$, vgl. L16.28.
  und $(\alpha A + \beta B)^* = \overline{\alpha}A^* + \overline{\beta}B^*$, $\alpha,\beta\in K$.

25.15 Bsp. im $\mathbb{C}^4$:

- Betr. $A = \frac12\begin{pmatrix}0 & 0 & 1+i & 1-i\\ 0 & 0 & 1-i & 1+i\\ 1+i & 1-i & 0 & 0\\ 1-i & 1+i & 0 & 0\end{pmatrix}$, hat die EWe $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = i$, $\lambda_4 = -i$,
  zugeh. EVen $x_1 = \frac12\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$, $x_2 = \frac12\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}$, $x_3 = \frac12\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}$, $x_4 = \frac12\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}$. $\rightsquigarrow$ ONB, ✓

Weil eine ONB aus EVen existiert, ist A normal laut Satz 25.9,
d.h. es gilt $AA^* = A^*A$. Haben sogar: A ist unitär in $\mathbb{C}^4$ laut 25.8: die Spalten von A bilden auch schon eine ONB (nachrechnen!). Also gilt: $AA^* = A^*A = I_4$.

- Betr. $A = \frac12\begin{pmatrix}0 & 0 & 1+i & 1-i\\ 0 & 0 & 1-i & 1+i\\ 1-i & 1+i & 0 & 0\\ 1+i & 1-i & 0 & 0\end{pmatrix}$, so dass $A^* = A$, d.h. A ist selbstadjungiert.
  A hat die (reellen) EWe $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = \lambda_4 = -1$
  mit EVen $x_1 = \frac12\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$, $x_2 = \frac12\begin{pmatrix}i\\-i\\1\\-1\end{pmatrix}$, $x_3 = \frac12\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}$, $x_4 = \frac12\begin{pmatrix}1\\-1\\i\\-i\end{pmatrix}$, die eine ONB von $\mathbb{C}^4$ bilden.