Vorlesung Lineare Algebra I

WiSe'19/'20 hhu
K. Halupczok

§6: Euklidische und unitäre Vektorräume
L24: Orthonormalbasen

Stichworte: (B)O(N)S, O(N)B, Schmidt-Orthogonalisierung, orthogonales Komplement, Proximum, approximative Lösung eines unlösbaren LGS, adjungierte Matrix, Normalengleichung.

Orthogonalität

Sei V ein unitärer Raum und $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein Skalarprodukt auf V.

24.1. Def.: • $x, y \in V$ heißen orthogonal, falls $\langle x,y\rangle = 0$.
Dabei ist $x=0$ und/oder $y=0$ zugelassen. Schreiben: $x \perp y$.

$\perp$

$S^\perp$

• Ist $S \subseteq V$, so heißt $S^\perp = \{x \in V;\ \langle x,y\rangle = 0 \text{ für alle } y \in S\}$ das orthogonale Komplement von S in V.

• Ist $S \subseteq V$, so heißt S Orthogonalsystem von V bzgl. $\langle\cdot,\cdot\rangle$ (OS), falls $\forall x,y \in S, x\neq y: \langle x,y\rangle = 0$

• Ist $S \subseteq V$ ein OS, so heißt S Orthonormalsystem (ONS), falls $\forall x \in S: \langle x,x\rangle = 1$.

• Ist $S \subseteq V$ Basis von V, das Orthogonalsystem ist, so heißt S Orthogonalbasis.

• Ist $S \subseteq V$ Orthogonalbasis von V mit $\langle x,x\rangle = 1$ für alle $x \in S$, so heißt S Orthonormalbasis (ONB). ⌜"normal" = "normiert"⌟

24.2. Bem.: • Zwei Familien $(x_i)_{i\in I}$ und $(y_j)_{j\in I}$ in V heißen Biorthonormalsystem (BONS), wenn für alle $i,j \in I$ gilt: $\langle x_i, y_j\rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j, \\ 0, & i\neq j. \end{cases}$

• Wir nennen sie Biorthogonalsystem (BOS), wenn $\forall i,j \in I: \langle x_i, y_j\rangle \begin{cases} \neq 0, & i=j, \\ =0, & i\neq j \end{cases}$ gilt.

• Eine Familie von Vektoren in V bildet ein ONS, wenn sie mit sich selbst ein BONS bildet. (Sie bildet ein OS, wenn sie mit sich selbst ein BOS bildet.)

• im $\mathbb{R}^n$ gilt für das Standard-S.P. $\langle x,y\rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k$, dass $\langle x,y\rangle = 0$ ist genau wenn x und y senkrecht/orthogonal aufeinanderstehen [Kosinussatz 23.7.].

• Werden manche der Vektoren eines OS mit Skalaren $\neq 0$ multipliziert, bleibt die so veränderte neue Vektormenge ein OS.

• Ein Vektor x mit $\langle x,x\rangle = 1$ heißt normiert.

24.3. Satz: (1) Bilden $(x_i)_{i\in I}, (y_j)_{j\in I}$ ein BOS in V, so sind je endlich viele der x_i bzw. der y_j linear unabhängig.
(2) In einem OS $(x_i)_{i\in I}$ sind je endlich viele Vektoren linear unabhängig.
Bew.: (1): Sei $(x_1,\dots,x_m)$ und $(y_1,\dots,y_m)$ ein solcher endlicher Teil des BOS
Wir betrachten eine LK $0 = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i$ und bilden das S.P. mit y_j zu einem festen j, so folgt $0 = \langle 0, y_j\rangle = \langle \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i, y_j\rangle = \sum_{i=1}^m \lambda_i \underbrace{\langle x_i, y_j\rangle}_{=\delta_{ij}} = \lambda_j$. Da j beliebig war, folgt, dass $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$ ist, dann sind $x_1,\dots,x_m$ also linear unabhängig.
(2): Folgt aus (1), da ein ONS ein BONS mit sich selbst bildet. □

Zur Existenz von ONSen gibt der folgende wichtige Satz eine positive Antwort in Form einer expliziten Konstruktion: (auch: Gram-Schmidt)

24.4. Satz (Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren / Orthogonalisierung nach E. Schmidt):
Sei V ein unitärer Raum mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$.
Sei $(v_1, v_2, \dots)$ eine (endl. oder abzählbar unendl.) lin. unabh. Familie von Vektoren in V.
Durch

$$b_1 := v_1,$$
$$b_2 := v_2 - \frac{\langle v_2, b_1\rangle}{\langle b_1, b_1\rangle}\cdot b_1 \qquad \rightsquigarrow \text{dann } \langle b_2, b_1\rangle = \dots = 0$$
$$b_3 := v_3 - \frac{\langle v_3, b_1\rangle}{\langle b_1, b_1\rangle}\cdot b_1 - \frac{\langle v_3, b_2\rangle}{\langle b_2, b_2\rangle}\cdot b_2 \qquad \rightsquigarrow \text{dann } \langle b_3, b_2\rangle = \langle b_3, b_1\rangle = 0$$
$$\vdots$$
$$b_m := v_m - \frac{\langle v_m, b_1\rangle}{\langle b_1, b_1\rangle}\cdot b_1 - \dots - \frac{\langle v_m, b_{m-1}\rangle}{\langle b_{m-1}, b_{m-1}\rangle}\cdot b_{m-1} \qquad \rightsquigarrow \dots$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots \quad \text{usw.}$$

ist ein OS $(b_1, b_2, \dots)$ von V gegeben, für das
$L(b_1,\dots,b_m) = L(v_1,\dots,v_m)$ für jede endliche Teilfamilie $(b_1,\dots,b_m)$ von $(b_1, b_2, \dots)$ gilt.
Durch Normierung, d.h. $c_m := \frac{b_m}{\|b_m\|}$ für alle m ist dann ein ONS $(c_1, c_2, \dots)$ von V gegeben.
[Zusatz klar]

24.5. Bem.: • Etwas kompakter geschrieben lautet die Rekursionsformel $b_1 := v_1$,
und $b_{m+1} := v_{m+1} - \sum_{i=1}^m \frac{\langle v_{m+1}, b_i\rangle}{\langle b_i, b_i\rangle}\cdot b_i$ für $m \geq 1$.
• Die Rekursion lässt sich gleich für die Familie $(c_1, c_2, \dots)$ aufschreiben als
$c_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|}$, $b_{m+1} := v_{m+1} - \sum_{i=1}^m \langle v_{m+1}, c_i\rangle\, c_i$, $c_{m+1} := \frac{b_{m+1}}{\|b_{m+1}\|}$ (weil $\frac{1}{\langle b_i, b_i\rangle} = \frac{1}{\|b_i\|^2}$).

Bew.: Haben z.z.: (1) $\forall m: b_m \neq 0$, (2) $\forall n,m,\ m<n: \langle b_n, b_m\rangle = 0$,
(3) $\forall n: L(b_1,\dots,b_n) = L(v_1,\dots,v_n)$. Vollst. Ind. nach n: Alle diese Beh. gelten für $n=1$ ✓.
Ind.schritt $n \rightsquigarrow n+1$: Zu (1): Wegen Ind.vor. ist $L(b_1,\dots,b_n) = L(v_1,\dots,v_n)$.
Daraus folgt $\sum_{i=1}^{n} \frac{\langle v_{n+1}, b_i\rangle}{\langle b_i, b_i\rangle} \cdot b_i \in L(b_1,\dots,b_n) = L(v_1,\dots,v_n)$. Da $(v_1,\dots,v_n,v_{n+1})$ linear unabh., ist somit $b_{n+1} \neq 0$. Zu (2): Sei $m \leq n < n+1$. Dann ist

$$\langle b_{n+1}, b_m\rangle = \langle v_{n+1}, b_m\rangle - \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle v_{n+1}, b_i\rangle}{\langle b_i, b_i\rangle} \cdot \underbrace{\langle b_i, b_m\rangle}_{=0 \text{ für } i \neq m}$$

$$= \langle v_{n+1}, b_m\rangle - \frac{\langle v_{n+1}, b_m\rangle}{\langle b_m, b_m\rangle} \cdot \langle b_m, b_m\rangle$$

$$= \langle v_{n+1}, b_m\rangle - \langle v_{n+1}, b_m\rangle = 0.$$

Zu (3): Wegen $L(b_1,\dots,b_n) = L(v_1,\dots,v_n)$ laut Ind.vor. folgt
$b_{n+1} \in L(b_1,\dots,b_n, v_{n+1}) = L(v_1,\dots,v_n,v_{n+1})$, also
$L(b_1,\dots,b_n,b_{n+1}) \subseteq L(v_1,\dots,v_{n+1})$. Da die $(b_1,\dots,b_{n+1})$ als OS lin. unabh. laut 24.3(2), folgt die Gleichheit. □

24.6. Bem.: Das Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren macht aus einer Basis $(v_1,\dots,v_n)$ eines n-dim. unitären Raums V eine ONB $(c_1,\dots,c_n)$.
- Man kann damit auch jedes (abzählbare) Orthogonalsystem zu einer ONB ergänzen.
- Wenden wir den Satz 24.4 gleich an:

24.7. Satz: Sei V unitärer Raum mit SP $\langle\cdot,\cdot\rangle$, sei $S \subseteq V$ und U ein UVR von V. Dann gilt:
(1) Ist $\dim V < \infty$, so hat V bzgl. $\langle\cdot,\cdot\rangle$ eine Orthogonalbasis.
(2) $S^\perp$ ist UVR von V.
(3) Ist $\dim V < \infty$, so gilt $V = U \oplus U^\perp$, d.h. U und $U^\perp$ sind komplementär.

Bew.: (1): Man wähle irgendeine Basis von V und orthogonalisiere.
(2): $0 \in S^\perp$, mit $x,y \in S^\perp$, $\alpha,\beta \in K$, ist auch $\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha \overbrace{\langle x,z\rangle}^{=0} + \beta \overbrace{\langle y,z\rangle}^{=0} = 0$ für alle $z \in S$, also $\alpha x + \beta y \in S^\perp$.
(3): Sei $(c_1,\dots,c_m)$ ONB von U, ergänze zu ONB $(c_1,\dots,c_m,c_{m+1},\dots,c_n)$ von V.
Dann setze $U_0 := L(c_{m+1},\dots,c_n)$, also U und U_0 komplementär, d.h. $U \oplus U_0 = V$.
Weiter ist $\forall x \in U\ \forall y \in U_0: \langle x,y\rangle = 0$ aufgrund der Konstruktion, also $U_0 = U^\perp$. □

Mit einer ONB $(c_1,\dots,c_n)$ lässt sich besonders bequem rechnen:

24.8 <u>Satz:</u> Sei V ein unitärer Raum mit S.P. $\langle\,;\,\rangle$, $(c_1,\dots,c_n)$ eine ONB von V.

Dann: (1) Ist $v=\sum_{i=1}^n \lambda_i c_i$, $w=\sum_{i=1}^n \mu_i c_i$, so ist $\langle v,w\rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i\overline{\mu_i}$.

(2) Ist $v=\sum_{i=1}^n \lambda_i c_i$, so ist $\|v\| = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\overline{\lambda_i}\right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^n|\lambda_i|^2\right)^{\frac12}$.

(3) Für jedes $v\in V$ ist $v=\sum_{i=1}^n \langle v,c_i\rangle c_i$ und $\|v\| = \left(\sum_{i=1}^n |\langle v,c_i\rangle|^2\right)^{\frac12}$.

<u>Bew.:</u>

<u>Zu (1):</u> Haben $\langle v,w\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n\lambda_i c_i, \sum_{j=1}^n \mu_j c_j\right\rangle = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \lambda_i\overline{\mu_j}\underbrace{\langle c_i,c_j\rangle}_{=\delta_{ij}} = \sum_{i=1}^n \lambda_i\overline{\mu_i}$.

<u>Zu (2):</u> nimm $w=v$ in (1), <u>Zu (3):</u> Sei $w := v - \sum_{i=1}^n\langle v,c_i\rangle c_i$. Dann ist für jedes j: $\langle w,c_j\rangle = \langle v,c_j\rangle - \sum_{i=1}^n \langle v,c_i\rangle \underbrace{\langle c_i,c_j\rangle}_{=\delta_{ij}} = \langle v,c_j\rangle - \langle v,c_j\rangle = 0$.

Die c_j bilden eine Basis von V.

Damit hat jedes $z\in V$ die Form $z=\sum_{j=1}^n\lambda_j c_j$. Damit folgt dann

$\langle w,z\rangle = \left\langle w, \sum_{j=1}^n \lambda_j c_j\right\rangle = \sum_{j=1}^n \overline{\lambda_j}\underbrace{\langle w,c_j\rangle}_{=0} = 0$. Da dies für jeden Vektor $z\in V$ gilt, gilt dies auch für $z:=w$, so dass $\langle w,w\rangle=0$, also $w=0$ folgt, da $\langle\,;\,\rangle$ positiv definit ist. Der Zusatz zu $\|v\|$ folgt jetzt aus (2). □

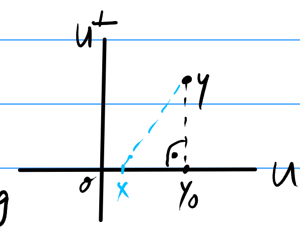
Eine wichtige Anwendung, die approximative Lösung von LGSen, möchten wir noch vorstellen.

24.9 <u>Satz und Def.</u> (<u>Proximum</u>): Sei V ein unitärer Raum mit S.P. $\langle\,;\,\rangle$, U UVR von V, $\dim U = m$, $y\in V$. Dann ex. genau ein $y_0\in U$, so dass $y-y_0\in U^\perp$.

Für y_0 gilt $\|y-y_0\|<\|y-x\|$ für jedes $x\in U$, $x\neq y_0$.

Man nennt y_0 das <u>Proximum zu y in U</u>.

(Auch: das <u>auf U gefällte Lot von y</u>.)



<u>Bem.:</u> Haben diese Konstruktion eines Lotes (falls $U=L(x)$) bereits in <u>23.19</u> für geometrische Anwendungen benutzt.

<u>Bew.:</u> • Ist $y\in U$, so setze $y_0:=y$, dann ist $y-y_0=0$, und alle anderen Beh. sind klar.

• Sei also OE $y\notin U$. Wähle irgendeine Basis $(v_1,\dots,v_m)$ von U, womit $(v_1,\dots,v_m,y)$ lin. unabh. sind. Orthogonalisiere dieses System nach Schmidt, <u>Satz 24.4</u>.

Wir erhalten so ein ONS $(c_1, \dots, c_{m+1})$ mit $L(c_1, \dots, c_m) = L(v_1, \dots, v_m) = U$,
$y \in L(c_1, \dots, c_{m+1})$. Dann hat y eine Darstellung $y = \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i c_i$.
Wir setzen $\underline{y_0 := \sum_{i=1}^{m} \lambda_i c_i}$ und zeigen dafür die Beh.

- Nach Konstruktion ist $y_0 \in L(c_1, \dots, c_m) = U$. Ferner ist $y - y_0 = \lambda_{m+1} c_{m+1} \in U^\perp$, da ja c_{m+1} zu allen Elementen einer Basis von U orthogonal ist.
- Ist schließlich y_0' ein weiterer solcher Vektor, so ist $y_0' - y_0 \in U$, da beide $\in U$. Ferner ist $y_0' - y_0 = (y - y_0) - (y - y_0') \in U^\perp$, da beide Differenzen $\in U^\perp$. Damit ist $y_0' - y_0 \in U \cap U^\perp$, und da die Räume Komplementär sind nach 24.7(3), ist $y' - y_0 = 0$.
- Schließlich gilt die Proximum-Eigenschaft: Für jedes $x \in U$ ist

$$\|y - x\|^2 = \|(y - y_0) - (x - y_0)\|^2 = \langle (y - y_0) - (x - y_0), (y - y_0) - (x - y_0) \rangle$$
$$= \|y - y_0\|^2 + \|x - y_0\|^2 - \langle y - y_0, x - y_0 \rangle - \langle x - y_0, y - y_0 \rangle.$$

Bei den letzten beiden S.P.-Termen ist jeweils ein Argument in $U^\perp$, das andere in U, somit sind diese $= 0$. Also ist

$$\|y - x\|^2 = \|y - y_0\|^2 + \underbrace{\|x - y_0\|^2}_{\geq 0} \geq \|y - y_0\|^2,$$ wobei "=" genau für $x = y_0$ eintritt.

Obwohl wir die Konstruktion von y_0 von irgendeiner Basis von U abhängig gemacht haben, ist y_0 also das Proximum, dadurch eindeutig bestimmt und somit unabhängig von der gewählten Basis von U. □

Mit diesem Satz können wir Probleme der "Ausgleichsrechnung" behandeln:

24.10. <u>Problem: Approximative Lösung eines LGS</u>

Gegeben sei das LGS $Ax = b$ mit $A \in K^{m \times n}$. Weiter sei

(1) $b \notin \operatorname{im} A$, d.h. das LGS ist <u>nicht</u> lösbar,

(2) $n < m$ und $\operatorname{rg} A = n$, d.h. die Spalten $(a_1, \dots, a_n)$ von A sind zwar linear unabhängig, bilden aber <u>keine</u> Basis des K^m.

<u>Gesucht</u>: ein $x_0 \in K^n$, so dass $\|Ax_0 - b\|$ minimal ist.

<u>Lösung</u>: Verwende <u>Satz 24.9</u> mit $V := K^m$, $U := L(a_1, \dots, a_n)$, $y := b \notin U$ und konstruiere das eindeutig bestimmte Proximum b_0 zu b in U.

Dieses b_0 tut's: Wegen $U = \operatorname{im} A$ ist dann $b_0 \in \operatorname{im} A$, d.h. $Ax = b_0$ ist lösbar, und da A maximalen Rang hat, sogar eindeutig lösbar.
$\ulcorner Ax = b_0 = Ax' \Rightarrow A(x-x') = 0 \Rightarrow x - x' = 0$, da $\ker A = 0$ wegen $n = \overset{n}{\widetilde{\operatorname{rg} A}} + \dim \ker A \Rightarrow \dim \ker = 0 \lrcorner$
Die Lösung sei x_0. Dann ist $\|Ax_0 - b\| = \|b_0 - b\| < \|x - b\|$ für alle $x \in U = \operatorname{im} A$, $x \neq b_0$, d.h. $\|Ax_0 - b\|$ ist minimal (und $Ax_0 - b \perp U$).

Zum praktischen Rechnen kann man wie folgt mit der adjungierten Matrix vorgehen.

24.11. **Def.:** Sei $A \in K^{m \times n}$ eine Matrix mit El. aus $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.
Dann heißt $A^* \in K^{n \times m}$, $A^* := \bar{A}^T$ die adjungierte Matrix.
Man erhält sie, indem man A transponiert und (nur im Falle $K = \mathbb{C}$) alle Elemente konjugiert komplex nimmt.

24.12. **Satz (Lösung von 24.10):** Man bilde das LGS $A^*Ax = A^*b$, die sogenannte Normalengleichung. Dafür gilt:
(1) Es hat für jedes $b \in \mathbb{C}^m$ eine eindeutig bestimmte Lösung x_0.
Für dieses zu b gehörige x_0 ist $\|Ax_0 - b\|$ minimal.
(2) Falls $\operatorname{rg}(A) = n \leq m$ ist, ist $A^*A \in K^{n \times n}$ eine invertierbare Matrix.

Bew.: Seien $a_j^* = (\alpha_{j1}^*, \dots, \alpha_{jm}^*)$, $j = 1, \dots, n$ die Zeilen von A^*,

und seien $a_j = \begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \vdots \\ \alpha_{mj} \end{pmatrix}$, $j = 1, \dots, n$ die Spalten von A, d.h. für alle $j = 1, \dots, n$, $i = 1, \dots, m$ gilt $\alpha_{ji}^* = \overline{\alpha_{ij}}$.

Sei nun $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^m$. Wir bilden das Matrix-Produkt $a_j^* \cdot v$ (Zeile × Spalte).
Dann haben wir $a_j^* \cdot v = \sum_{i=1}^m \alpha_{ji}^* v_i = \sum_{i=1}^m \overline{\alpha_{ij}} v_i = \sum_{i=1}^m v_i \overline{\alpha_{ij}} = \langle v, a_j \rangle$,
das ist genau das Standard-S.P. im $\mathbb{C}^m$.
Somit folgt $A^* v = \begin{pmatrix} \langle v, a_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle v, a_n \rangle \end{pmatrix}$ für jedes $v \in \mathbb{C}^m$.
Also gilt: $v \perp \operatorname{im} A \Leftrightarrow A^* v = 0$. (*)

Zu (1): Hatten in 24.10 gesehen: Haben genau eine Lösung x_0, für die $Ax_0 - b \perp \operatorname{im} A$ gilt.
• Mit $b = Ax_0 - (Ax_0 - b)$ folgt $A^*b = A^*Ax_0 - A^*(Ax_0 - b) = A^*Ax_0$, da $Ax_0 - b \perp \operatorname{im} A$ (mit (*)). Somit erfüllt x_0 die Normalengl., die ist somit lösbar.

• Ist x irgendeine Lösung von $A^*Ax = A^*b$, so ist $0 = A^*Ax - A^*b = A^*(Ax-b)$, somit $Ax - b \perp \operatorname{im} A$. Damit ist Ax das Proximum zu b, eindeutig bestimmt, also $x = x_0$.
Zu (2): $A^*A \in K^{n\times n}$ ist quadratisch. Da $A^*Ax = A^*b$ eindeutig lösbar, ist A^*A invertierbar. □

24.13. Bsp. für das Schmidt-Orthogonalisierungsverfahren: Im $\mathbb{R}^4$ mit Standard-S.P. sei $v_1 := \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$, $v_2 := \begin{pmatrix}3\\3\\1\\1\end{pmatrix}$, $v_3 := \begin{pmatrix}5\\3\\3\\1\end{pmatrix}$, $v_4 := \begin{pmatrix}8\\4\\2\\2\end{pmatrix}$.

• Dann: $b_1 := v_1$, $\|b_1\| = \sqrt{4} = 2$, also $c_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{\|b_1\|}\cdot b_1$.

• Dann: $b_2 := v_2 - \sum_{i=1}^{1} \langle v_2, c_i\rangle c_i = v_2 - \langle v_2, c_1\rangle c_1 = \begin{pmatrix}3\\3\\1\\1\end{pmatrix} - 4\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}$,

also $c_2 = \frac{1}{\|b_2\|}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}$. $\quad b_{m+1} := v_{m+1} - \sum_{i=1}^{m} \langle v_{m+1}, c_i\rangle c_i$

• Dann: $b_3 := v_3 - \sum_{i=1}^{2} \langle v_3, c_i\rangle c_i = v_3 - \langle v_3, c_1\rangle c_1 - \langle v_3, c_2\rangle c_2$

$= \begin{pmatrix}5\\3\\3\\1\end{pmatrix} - 6\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} - 2\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$, also $c_3 = \frac{1}{\|b_3\|}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$.

• Dann: $b_4 := v_4 - \sum_{i=1}^{3} \langle v_4, c_i\rangle c_i = v_4 - \langle v_4, c_1\rangle c_1 - \langle v_4, c_2\rangle c_2 - \langle v_4, c_3\rangle c_3$

$= \begin{pmatrix}8\\4\\2\\2\end{pmatrix} - 4\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} - 2\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix} - 1\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}$, also $c_4 = \frac{1}{\|b_4\|}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

Unsere ONB ist dann (c_1, c_2, c_3, c_4). Und ja: $L(c_1) = L(v_1)$, $L(c_1, c_2) = L(v_1, v_2)$, $L(c_1, c_2, c_3) = L(v_1, v_2, v_3)$, $L(c_1, \dots, c_4) = \mathbb{R}^4$.

24.14. Bsp. zur approximativen Lsg. eines LGS: $Ax = b$ mit

$A = \begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\\1&-1&-1\end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix}3.1\\0.9\\0.9\\-0.9\end{pmatrix}$ (der Vektor b könnte etwa durch Messungen entstanden sein und Messfehler enthalten).

Mit Gauß-Elimination überzeugt man sich, dass $Ax = b$ keine Lösung hat. Stattdessen betr. $A^*Ax = A^*b$, haben $A^*A = \begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&-1&1&-1\\1&1&-1&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\\1&-1&-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{pmatrix}$, $A^*b = \begin{pmatrix}4\\4\\4\end{pmatrix}$. Somit ist $x_0 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ Lsg. von $A^*Ax = A^*b$.

(Unsere Messfehler ergeben sich aus $\|Ax_0 - b\| = \left\|\begin{pmatrix}3\\1\\1\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3.1\\0.9\\0.9\\-0.9\end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}-0.1\\0.1\\0.1\\-0.1\end{pmatrix}\right\| = 0.2$.)