Vorlesung Lineare Algebra I

WiSe'19/'20 hhu
K. Halupczok

§6: Euklidische und unitäre Vektorräume

L22: Räume mit Skalarprodukt

Stichworte: Bilinearform, hermitesch/symmetrisch, Sesquilinearform, positiv (semi-)definit, Skalarprodukt, euklidischer/unitärer Raum, Standardskalarprodukt, Norm $\|\cdot\|$, Cauchy-Schwarz, Δ-Ungl.

Im Zusammenhang mit Determinanten hatten wir schon n-multilineare Abbildungen eingeführt. Für $n=1$ sind das die gewöhnlichen linearen Abbildungen. Der Fall $n=2$ führt uns zu geometrischen Begriffen wie "senkrechtstehen", "Länge eines Vektors", "Winkel", "Abstand" etc., sofern wir spezielle Bilinearformen betrachten, die Skalarprodukte heißen.

22.1. **Def.:** Sei V ein K-Vektorraum. Eine Abb. $b: V\times V\to K$ heißt Bilinearform, falls gilt:

$$(1)\quad \left.\begin{aligned} b(x_1+x_2,y_1) &= b(x_1,y_1)+b(x_2,y_1)\\ b(x_1,y_1+y_2) &= b(x_1,y_1)+b(x_1,y_2)\end{aligned}\right\}\text{ für alle } x_1,x_2,y_1,y_2\in V$$

$$(2)\quad \left.\begin{aligned} b(\alpha x,y) &= \alpha\, b(x,y)\\ b(x,\alpha y) &= \alpha\, b(x,y)\end{aligned}\right\}\text{ für alle } x,y\in V,\ \alpha\in K$$

22.2. **Bem.:** Per Definition ist eine Bilinearform $b: V\times V\to K$ eine auf V 2-multilin. Abb., vgl. 18.2 (D1).

22.3. Wir benötigen aber spezielle Bilinearformen. Daher def. wir folgende Eigenschaften.

Def.: Sei V ein K-VR, $b: V\times V\to K$ eine Abbildung.

1.) b heißt symmetrisch, falls $b(x,y)=b(y,x)$ für alle $x,y\in V$.

⌜**Bem.:** Eine symmetrische Abbildung b, die linear in einem der Argumente ist, ist auch schon im zweiten Argument linear, und damit eine Bilinearform.⌟

2.) Ist b Bilinearform, so heißt b alternierend, falls $b(x,x)=0$ für alle $x\in V$.

⌜1. **Bem.:** Durch Ausrechnen von $0=b(x+y,x+y)=\underbrace{b(x,x)}_{=0}+b(x,y)+b(y,x)+\underbrace{b(y,y)}_{=0}$ folgt sofort $b(x,y)=-b(y,x)$, sofern $1+1\neq 0$ in K gilt, d.h. also nicht in $\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_4, \mathbb{F}_8, \ldots$! Wird $K\in\{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$ vorausgesetzt, wird daher häufig die Definition "$b(x,y)=-b(y,x)$" für "alternierend" gegeben.⌟

2. **Bem.:** Diese Def. führt genau auf die Def. "alternierend" (D2) von 18.2, mit $n=2$.

3. **Bem.:** Eine alternierende Bilinearform ist genau eine Determinantenfkt. im Fall $n=2$.

4. **Bem.:** Statt "alternierend" gibt es auch die Begriffe antisymmetrisch/schiefsymmetrisch.⌟

Für uns sollen jetzt nur die Fälle $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ eine Rolle spielen, wo die Werte einer Bilinearform reell und dann >0 oder <0 sein können.

22.4. <u>Vereinbarung:</u> Im gesamten §6 betrachten wir nur reelle oder komplexe VRe, d.h. der Grundkörper K ist $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, d.h. $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Für eine komplexe Zahl $z = x+iy$ ist dann $\bar{z} = x-iy$ die konjugiert komplexe. Alle Sätze und Definitionen – sofern nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt wird – die sich auf den komplexen Fall beziehen, gelten dann auch für den reellen Fall, wofür ein „Konjugiert-Strich" gegenstandslos ist (denn für $x \in \mathbb{R}$ gilt $\bar{x} = x$).

22.5. <u>Def.:</u> Sei V ein K-VR mit $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, und $b: V\times V \to K$ eine Abbildung.

1.) b heißt <u>hermitesch</u>, falls $b(x,y) = \overline{b(y,x)}$ für alle $x,y \in V$ gilt.

⌜Ist $K = \mathbb{R}$, so ist b dann symmetrisch. Dann würde man b eher "symmetrisch" nennen.⌟

<u>Bem.:</u> Eine hermitesche Abbildung b, die linear in <u>einem</u> der Argumente ist, ist i.a. <u>nicht</u> schon im zweiten Argument linear, und damit <u>keine</u> Bilinearform. Die "Konjugierte Linearität" bekommt einen anderen Namen:

2.) Sei $K = \mathbb{C}$. Eine Abbildung $b: V\times V \to \mathbb{C}$ heißt <u>Sesquilinearform</u>, falls gilt:

$$(1)\quad \left.\begin{aligned} b(x_1+x_2, y_1) &= b(x_1,y_1) + b(x_2,y_1) \\ b(x_1, y_1+y_2) &= b(x_1,y_1) + b(x_1,y_2) \end{aligned}\right\} \text{ für alle } x_1,x_2,y_1,y_2 \in V$$

$$(2)\quad \left.\begin{aligned} b(\alpha x, y) &= \alpha\, b(x,y) \\ b(x, \alpha y) &= \bar{\alpha}\, b(x,y) \end{aligned}\right\} \text{ für alle } x,y \in V, \alpha \in \mathbb{C}$$

← der Konjugiert-Strich ist der Unterschied im Vgl. mit 22.1.

3.) Eine hermitesche Sesquilinearform heißt <u>hermitesche Form</u>.

22.6. <u>Lemma:</u> Eine Abbildung $b: V\times V \to \mathbb{C}$, die linear im 1. Argument und hermitesch ist, ist eine Sesquilinearform und somit eine hermitesche Form.

<u>Bew.:</u> <u>Genügt z.z.:</u> die 2. Teile der Def. in 22.5.2). Haben:

$$b(x_1, y_1+y_2) = \overline{b(y_1+y_2, x_1)} = \overline{b(y_1,x_1)} + \overline{b(y_2,x_1)} = b(x_1,y_1) + b(x_1,y_2) \text{ und}$$
$$b(x, \alpha y) = \overline{b(\alpha y, x)} = \overline{\alpha\, b(y,x)} = \bar{\alpha} \cdot \overline{b(y,x)} = \bar{\alpha} \cdot b(x,y). \qquad \square$$

22.7. <u>Bem.:</u>
- Hermitesche Formen benötigt man, damit $b(x,x)$ stets reell ist ($b(x,x) = \overline{b(x,x)} \Leftrightarrow b(x,x) \in \mathbb{R}$) und somit $b(x,x)$ ein Vorzeichen hat. Idealerweise sollte $b(x,x) \geq 0$ sein, damit wir $\sqrt{b(x,x)}$ bilden und es als Länge von x interpretieren können.
- Eine reelle hermitesche Form $b: V\times V \to \mathbb{R}$ ist eine symmetrische Bilinearform.

22.8. Def.: Sei V ein K-VR, $K\in\{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$. 1.) Eine hermitesche Form $b: V\times V\to K$ heißt positiv definit falls 1. $b(x,x)\geq 0$ für alle $x\in V$
und 2. $b(x,x)=0 \Leftrightarrow x=0$.
2.) Eine positiv definite hermitesche Form heißt auch positiv definites, hermitesches Skalarprodukt.
3.) Eine reelle, positiv definite hermitesche Form heißt reelles Skalarprodukt.
(Ein reelles Skalarprodukt ist also eine positiv definite, symmetrische Bilinearform über $\mathbb{R}$.)
4.) Gilt nur 1. in 1.), so heißt b positiv semidefinit.
5.) Entsprechend negativ (semi-) definit, wenn "$\geq$" in 1.) 1. durch "$\leq$" ersetzt wird.

22.9. Vereinbarung: Unter "Skalarprodukt" verstehen wir im folgenden stets ein positiv definites, hermitesches Skalarprodukt. Reelle Skalarprodukte sind so immer inbegriffen.
Wir schreiben im folgenden stets $\langle x,y\rangle$ für $b(x,y)$ und $\langle\cdot,\cdot\rangle$ für b, wenn b ein Skalarprodukt ist.
Das Skalarprodukt $\langle x,y\rangle$ zweier Vektoren $x,y\in V$ ist also stets eine (komplexe) Zahl / ein Skalar, daher der Name.

22.10. Eigenschaften von Skalarprodukten: Sei $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein Skalarprodukt auf dem K-VR V, $K\in\{\mathbb{C},\mathbb{R}\}$. Dann gilt:

(1) $\forall x,y\in V: \langle x,y\rangle=\overline{\langle y,x\rangle}$ (hermitesch)
(2) $\forall x_1,x_2,y\in V: \langle x_1+x_2,y\rangle=\langle x_1,y\rangle+\langle x_2,y\rangle$ (Linear im 1. Argument)
(3) $\forall x,y\in V\ \forall\alpha\in K: \langle\alpha x,y\rangle=\alpha\langle x,y\rangle$
(4) $\forall x\in V: \langle x,x\rangle\geq 0$, $\forall x\in V: \langle x,x\rangle=0\Leftrightarrow x=0$ (pos. def.)

laut Definition

(5) $\forall x,y\in V: \langle x,0\rangle=\langle 0,y\rangle=0$.
(6) $\forall x_1,x_2,y\in V\ \forall\alpha,\beta\in K: \langle\alpha x_1+\beta x_2,y\rangle=\alpha\langle x_1,y\rangle+\beta\langle x_2,y\rangle$
(7) $\forall x,y_1,y_2\in V\ \forall\alpha,\beta\in K: \langle x,\alpha y_1+\beta y_2\rangle=\bar\alpha\langle x,y_1\rangle+\bar\beta\langle x,y_2\rangle$

Bew.: (1)-(4): ✓, (5): $\forall x,y,z\in V: \langle 0,y\rangle=\langle 0\cdot z,y\rangle=0\cdot\langle z,y\rangle=0$
und $\langle x,0\rangle=\overline{\langle 0,x\rangle}=\bar 0=0$, (6): klar mit (2) und (3), haben (6)$\Leftrightarrow$(2)$\wedge$(3),
(7): $\langle x,\alpha y_1+\beta y_2\rangle \underset{(1)}{=} \overline{\langle\alpha y_1+\beta y_2,x\rangle} \underset{(2)}{=} \overline{\alpha\langle y_1,x\rangle+\beta\langle y_2,x\rangle}$
$=\bar\alpha\overline{\langle y_1,x\rangle}+\bar\beta\overline{\langle y_2,x\rangle} \underset{(1)}{=} \bar\alpha\langle x,y_1\rangle+\bar\beta\langle x,y_2\rangle$. □

22.11. **Bsp.:** Das wichtigste Bsp. ist das Standard-Skalarprodukt:

- Es sei $V := \mathbb{C}^n$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in V$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in V$,
  so heißt das durch $\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$ def. Skalarprodukt (Auch: $\langle x,y\rangle = x^T \cdot \overline{y}$)
  das (Kanonische) Skalarprodukt bzw. Standard-Skalarprodukt.
  (Bem.: anstelle $\langle x,y\rangle = x^T \cdot \overline{y}$ ist auch $\overline{x}^T \cdot y$ möglich, wenn für Sesquilinearformen die Konjugation im 1. statt 2. Argument genommen wird, was Konventionssache ist. Der Vektor $\overline{x}^T$ heißt der zu x hermitesch adjungierter Vektor.)
  Für $n=2$, $x = \binom{\xi_1}{\xi_2}$, $y = \binom{\eta_1}{\eta_2} \in \mathbb{C}^2$ ist $\langle x,y\rangle = \xi_1 \overline{\eta_1} + \xi_2 \overline{\eta_2}$.

- Für $K = \mathbb{R}$, $V := \mathbb{R}^n$, ist mit $\langle x,y\rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ für $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in V$, $y = (y_1, \dots, y_n)^T \in V$,
  das (reelle) Standard-Skalarprodukt definiert. (Auch: $\langle x,y\rangle = \underset{\text{Zeilenvektor}}{x^T} \cdot \underset{\text{Spaltenvektor}}{y}$)
  Für $n=2$, $x = \binom{\xi_1}{\xi_2}$, $y = \binom{\eta_1}{\eta_2} \in \mathbb{R}^2$ ist $\langle x,y\rangle = \xi_1 \eta_1 + \xi_2 \eta_2$.

- Sei $V := \mathcal{C}([\alpha,\beta])$ der $\mathbb{C}$-VR der auf dem Intervall $[\alpha,\beta] \subseteq \mathbb{R}$ stetigen komplexwertigen Funktionen, d.h. $\mathcal{C}([\alpha,\beta]) := \{ f : [\alpha,\beta] \to \mathbb{C};\ f \text{ stetig} \}$.
  Sei $p \in V$ so, dass p nur reelle positive Werte annimmt, d.h. $p : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}_{>0}$, p stetig. Dann ist für $f, g \in V$ durch
  $$\langle f, g \rangle := \int_\alpha^\beta p(t) f(t) \overline{g(t)}\, dt \qquad (*)$$
  ein Skalarprodukt definiert.
  Bew.: (4): $\langle f, f \rangle = \int_\alpha^\beta p(t) |f(t)|^2 dt > 0$ und $= 0 \Leftrightarrow \forall t \in [\alpha,\beta] : f(t) = 0$, d.h. $f = 0$.
  (6): $\langle \alpha_0 f_1 + \beta_0 f_2, g \rangle = \int_\alpha^\beta p(t) \cdot (\alpha_0 f_1(t) + \beta_0 f_2(t)) \overline{g(t)}\, dt$
  $$= \alpha_0 \int_\alpha^\beta p(t) f_1(t) \overline{g(t)}\, dt + \beta_0 \int_\alpha^\beta p(t) f_2(t) \overline{g(t)}\, dt = \alpha_0 \langle f_1, g\rangle + \beta_0 \langle f_2, g \rangle$$
  (1): $\langle f, g \rangle = \int_\alpha^\beta p(t) \underbrace{f(t) \overline{g(t)}}\, dt = \overline{\overline{\int_\alpha^\beta p(t) f(t) \overline{g(t)}\, dt}} = \overline{\int_\alpha^\beta \overline{p(t)}\, \overline{f(t)}\, g(t)\, dt}$ $\square$
  $$\underset{p(t) \text{ reell}: p(t) = \overline{p(t)}}{=} \overline{\int_\alpha^\beta p(t) \overline{f(t)} g(t)\, dt} = \overline{\langle g, f \rangle}.$$

22.12. **Def.:** Ein reeller oder komplexer Vektorraum mit Skalarprodukt heißt euklidischer oder unitärer Raum.
Bem.: Der Begriff "euklidisch" wird nur im reellen Fall benutzt.

22.13. Def.: Gegeben sei ein Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ auf V. Dann definieren wir für x,y
die Norm von x: $\|x\| := \sqrt{\langle x,x\rangle}$ (denn $\langle x,x\rangle \geq 0$),
den Abstand von x und y: $d(x,y) := \|x-y\|$.

Bem.: • Die Funktion $d: V^2 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist dann eine Metrik, vgl. Analysis.
• die Norm $\|x\|$ eines Vektors x bezeichnet man auch als Länge von x.
Gelegentlich schreibt man auch $|x|$ statt $\|x\|$ und nennt dies den Betrag von x.
• das Wort "Länge" wurde in vorangehenden Kapiteln ausschließlich synonym für "Kardinalität" benutzt. Erst jetzt sprechen wir von "Länge" eines Vektors im üblichen, anschaulichen Sinne, denn:
• Haben speziell $d(x,0) = \|x\| = d(0,x)$, d.h. die Norm von x ist der Abstand von x zu 0.

22.14. Bsp.: • Die Norm von $x \in \mathbb{C}^n$ im Falle des Standardskalarproduktes beträgt $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle} = \left(\sum_{i=1}^n |\xi_i|^2\right)^{1/2}$, wo $|\cdot|$ der Betrag auf $\mathbb{C}$ ist, d.h. $|\xi| = \sqrt{\xi\bar{\xi}}$,
also $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n \xi_i\bar{\xi}_i\right)^{1/2}$.

• Die Norm von $x \in \mathbb{R}^n$ im Falle des Standardskalarproduktes beträgt $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle} = \left(\sum_{i=1}^n |\xi_i|^2\right)^{1/2}$, wo $|\cdot|$ der Betrag auf $\mathbb{R}$ ist, d.h. $|\xi| = \sqrt{\xi^2}$,
also $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n \xi_i^2\right)^{1/2}$.

• Speziell $n=2$, $x \in \mathbb{R}^2$: $\|x\| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$, die "Länge" laut Pythagoras, vgl. L23.

Die folgende Abschätzung für ein Skalarprodukt ist mit das wichtigste Werkzeug der Linearen Algebra in Anwendungen:

22.15. Satz (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung / Ungleichung von Cauchy-Schwarz): kurz: "C-S"
In einem unitären Raum V gilt $\forall x,y \in V$: $|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\cdot\|y\|$,
(komplexer) Betrag
wobei "$=$" anstelle "$\leq$" genau dann gilt, wenn x,y linear abhängig sind.

Bew.: Ist $\langle x,y\rangle = 0$, ist nichts zu zeigen. Sei also OE $\langle x,y\rangle \neq 0$, und damit $x\neq 0$, $y \neq 0$ wegen 22.10.(5). Setze $\alpha := \frac{\overline{\langle x,y\rangle}}{|\langle x,y\rangle|}\cdot\|y\|$, $\beta := \frac{|\langle x,y\rangle|}{\|y\|}$. Dann ist
$0 \leq \|\alpha x - \beta y\|^2 = \langle \alpha x - \beta y, \alpha x - \beta y\rangle = \alpha\bar{\alpha}\|x\|^2 - \alpha\bar{\beta}\langle x,y\rangle - \beta\bar{\alpha}\langle y,x\rangle + \beta\bar{\beta}\|y\|^2$
$= \|y\|^2\cdot\|x\|^2 - \overline{\langle x,y\rangle}\cdot\langle x,y\rangle \underbrace{- \langle x,y\rangle\cdot\overline{\langle x,y\rangle} + |\langle x,y\rangle|^2}_{=0} = \|x\|^2\cdot\|y\|^2 - |\langle x,y\rangle|^2$.
Damit folgt die behauptete Unglg., und $=0$ kann nur für $\alpha x - \beta y = 0$ eintreten nach 22.16.(1). $\square$

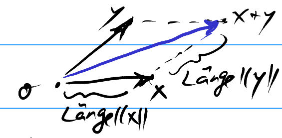
Weitere Rechenregeln für die Norm:

22.16. <u>Satz</u>: Für die Norm $\|\cdot\|$ in einem unitären Raum V gilt:

(1) $\forall x \in V: \|x\| \geq 0$, und $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

(2) $\forall x \in V \; \forall \alpha \in K: \|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$, wo $|\alpha|$ der Betrag von $\alpha \in K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ ist,

(3) $\forall x, y \in V: \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$. (Dreiecksungleichung)



<u>Bew.</u>: (1) folgt direkt aus 22.10 (4), der positiven Definitheit von $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

(2): $\|\alpha x\| = \sqrt{\langle \alpha x, \alpha x \rangle} = \sqrt{\alpha \cdot \bar{\alpha} \langle x, x \rangle} = \sqrt{|\alpha|^2 \cdot \langle x, x \rangle} = |\alpha| \cdot \|x\|$.

(3): Benutzen hier die C-S-Ungleichung 22.15 wie folgt:

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle = \|x\|^2 + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \|y\|^2$$
$$\leq \|x\|^2 + 2 \cdot |\langle x, y \rangle| + \|y\|^2$$
$$\underset{C\text{-}S}{\leq} \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 \underset{\text{bin. Formel}}{=} (\|x\| + \|y\|)^2,$$

jetzt $\sqrt{\ }$-ziehen und beachten, dass alle Terme ≥ 0 sind. $\square$

<u>Bem.</u>: 1. Schreiben kurz "Δ-Ungl." für "Dreiecksungleichung".

2. Eine Abb. $x \mapsto \|x\|$ eines reellen/komplexen VRs V heißt Norm von V, wenn 22.16 (1)–(3) gelten.

22.17. <u>Bsp.</u>: • Der unitäre Raum $\mathcal{C}([\alpha, \beta])$ mit dem Skalarprodukt $\circledast$ hat als Norm $\|f\| := \left(\int_\alpha^\beta p(t) |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}$.

Die C-S-Ungleichung lautet hier

$$\left| \int_\alpha^\beta p(t) f(t) \overline{g(t)} dt \right| \leq \left(\int_\alpha^\beta p(t) |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_\alpha^\beta p(t) |g(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ü Wie lautet hier die Dreiecksungleichung?

• Die C-S-Ungleichung im Falle $V = \mathbb{C}^m$ lautet

$$\left| \sum_{i=1}^m \xi_i \bar{\eta}_i \right|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^m |\xi_i|^2 \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^m |\eta_i|^2 \right), \quad \text{(haben Ungl. quadriert)}$$

im Falle $V = \mathbb{R}^m$ lautet sie $\left| \sum_{i=1}^m \xi_i \eta_i \right|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^m \xi_i^2 \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^m \eta_i^2 \right)$.

22.18. <u>Bem.</u>: Für eine (selbstadjungierte) Matrix $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$ wird durch $\langle x, y \rangle_A := \langle x, Ay \rangle$ eine hermitesche Form definiert. Wann ist diese aber ein S.P., d.h. pos. def.? Werden ein Kriterium in L27 kennenlernen und dort mit dem Trägheitssatz von Sylvester beweisen.