L21

Vorlesung Lineare Algebra I

WiSe'19/'20 hhu
K. Halupczok

§5: Endomorphismen

L21: Diagonalisierbarkeit, Trigonalisierbarkeit

Stichworte: Diagonalisierbarkeitskriterien mit Eigenräumen und χ_A bzw. χ_f, geometrische und algebraische Vielfachheit eines EWes, trigonalisierbar, Fahnenbasis

---

21.1. Die EWtheorie ist nützlich im Problem, eine Normalform (vgl. 20.1) aufzustellen: Sei V ein K-VR, $\dim_K V = n$. Geg. ein Endo $f: V \to V$. Gibt es eine Basis $\mathcal{B}$, bezüglich der die darstellende Matrix $\tilde{A} = {}_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{B}}$ möglichst einfache Gestalt hat? M.a.W. gibt es zu irgendeiner darstellenden Matrix A eine dazu ähnliche Matrix $\tilde{A}$, so dass $\tilde{A}$ möglichst einfache Gestalt hat?
(So, dass auf diese Weise auch eine "geometrische" Interpretation von f möglich wird.)
Haben dies in Zusammenfassung 20.13 für diagonalisierbare Endos/Matrizen geklärt: diag'bar $\Leftrightarrow$ $\exists$ Basis aus EVen, und: $\exists$ n versch. EWe $\Rightarrow$ diag'bar.

Wir möchten die Diagonalisierbarkeit noch näher mit den Eigenräumen E_λ spezifizieren: (Erinnerung: $E_\lambda := \ker(f - \lambda \mathrm{id}_V)$ für einen EW λ.)

21.2. Satz (äquivalente Bed. für Diag'barkeit): Sei V ein K-VR, $\dim_K V = n$, $f: V \to V$ Endo. Äquivalent sind: (i) f diag'bar, (ii) in V ex. Basis aus EVen von f,
(iii) V ist direkte Summe der Eigenräume von f, d.h. $V = E_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus E_{\lambda_k}$, ein $k \le n$,
(iv) die Summe der Dimensionen der Eigenräume von f ist gleich n,
d.h. $n = \sum_{i=1}^{k} \dim E_{\lambda_i}$, wo $k \le n$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ die p.w.v. EWe.

Bew.: (i) $\Rightarrow$ (ii): hat f bzgl. $\mathcal{B}$ die Diag'gestalt $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = A$, d.h. $Ae_i = \lambda_i e_i$, so gilt $f(v_i) = \lambda_i v_i$ für die Basisel. v_i von $\mathcal{B}$ (da ja $K_{\mathcal{B}}(v_i) = e_i$ gilt). Also besteht $\mathcal{B}$ aus EVen von f.
(ii) $\Rightarrow$ (iii): seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ die versch. EWe von f. Nach Satz 20.6 sind Familien $(v_1, \ldots, v_k)$, wo jedes $v_i \neq 0$ aus E_{λ_i} stammt, linear unabh. Es folgt $E_{\lambda_i} \cap \left(\sum_{j \neq i} E_{\lambda_j}\right) = 0$ für jedes $i \le k$. Also ist die Summe der E_{λ_i} direkt, d.h. $E_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus E_{\lambda_k} \subseteq V$. Für "$\supseteq$" sei $v \in V$ bel., bzgl. der Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ aus EVen ist $v = c_1 v_1 + \ldots + c_n v_n$. Fassen wir in dieser Formel alle Summanden zu EVen zum gleichen EW c_i zusammen, erhalten wir $v = \tilde{v}_1 + \ldots + \tilde{v}_k$, die $\tilde{v}_i \in E_{\lambda_i}$.

(iii)⇒(iv): Klar mit 12.8, (iv)⇒(i): Seien $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_k}$ die Eigenräume von f, $\dim E_{\lambda_i} =: m_i$.
Wählen in jedem E_{λ_i} Basis $\mathcal{B}_i$, setze $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_k$, ist lin. unabh. nach Satz 20.6.
Wegen $m_1 + \dots + m_k = n$ ist $\mathcal{B}$ sogar Basis von V, bzgl. der f Diag'gestalt hat. □

21.3. Bem.: Satz 21.2 gilt analog für K^n statt V und Matrix $A \in K^{n \times n}$ statt f.
Wir formulieren noch ein Kriterium für Diag'barkeit mit dem charakteristischen Polynom.
Dieses hat den Vorteil, dass wir dafür keine Eigenräume berechnen müssen wie in 21.2,
es genügt, deren Dimension (über eine Rangüberlegung) zu bestimmen.

21.4. Satz: Sei V ein K-VR, $\dim V = n$, $f: V \to V$ Endo. Dann gilt:

$$f \text{ diag'bar} \iff \chi_f \text{ hat die Form } \chi_f(T) = (-1)^n (T-\lambda_1)^{r_1} \cdots (T-\lambda_k)^{r_k} \qquad \boxed{*}$$

mit $r_i \in \mathbb{N}$, p.w.v. $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in K$,

und wenn für $i = 1, \dots, k$ gilt: $\underbrace{\dim \operatorname{im}}_{rg}(f - \lambda_i \mathrm{id}_V) = n - r_i$.

21.5. Bem.: 1) hat χ_f die Form $\boxed{*}$, so sagt man: χ_f zerfällt in Linearfaktoren,
und r_i ist die Vielfachheit der Nullstelle λ_i
(In diesem Fall heißt f (und jede Matrix, die f darstellt) zerfallend.)
2.) Die λ_i sind gerade die (p.w.v.) EWe von f.
3.) die zweite Forderung besagt $\underline{\underline{\dim E_{\lambda_i} = r_i}}$ für $i = 1, \dots, k$, da $E_{\lambda_i} = \ker(f - \lambda_i \mathrm{id}_V)$,
aufgrund des Rangsatzes
4.) entsprechendes gilt für $A \in K^{n \times n}$, ersetze $\dim \operatorname{im}(f - \lambda_i \mathrm{id}_V)$ durch $rg(A - \lambda_i I_n)$.
5.) hinreichend für Diag'barkeit: χ_f zerfällt in lauter verschiedene Linearfaktoren (dann alle $r_i = 1$).

Im allgemeinen werden $r_i := \dim E_{\lambda_i}$ und die Exponenten in $\boxed{*}$ nicht übereinstimmen.
Sobald sie es tun, so sagt Satz 21.4., ist f diag'bar (und umgekehrt). Wir
wollen diese Zahlen zunächst unterscheiden und führen dafür folgende Begriffe ein.

21.6 Def.: Die geometrische Vielfachheit eines EWs λ_i ist $\dim E_{\lambda_i}$, die Dimension des Eigenraums.
Die algebraische Vielfachheit eines EWs λ_i ist r_i, der Exponent von $(T - \lambda_i)$ in $\boxed{*}$.

21.7. Kor.: Sind geometrische und algebraische Vielfachheiten gleich (für jeden EW),
so ist f diag'bar (und umgekehrt). (klar mit 21.4, 21.6)

21.8 **Beweis von Satz 21.4:**

"$\Rightarrow$": f diag'bar $\Rightarrow$ hat Abb.matrix $A_f = \begin{pmatrix} \overbrace{\lambda_1 \ddots \lambda_1}^{r_1} \ldots \overbrace{\lambda_k \ddots \lambda_k}^{r_k} \end{pmatrix}$ mit p.w.v. $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in K$.

Dann: $\det(A_f - T I_n) = (\lambda_1 - T)^{r_1} \cdots (\lambda_k - T)^{r_k} = (-1)^n (T-\lambda_1)^{r_1} \cdots (T-\lambda_k)^{r_k}$, da $r_1 + \ldots + r_k = n$,

und $\dim \operatorname{im}(f - \lambda_i \mathrm{id}_V) = \operatorname{rg}(A_f - \lambda_i I_n) = \operatorname{rg}\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1-\lambda_i & & \\ & \lambda_1 - \lambda_i & \\ & & \ddots \end{pmatrix}}_{\text{hat } r_i \text{ viele Nullzeilen für } \lambda_i - \lambda_i = 0} = n - r_i$.

"$\Leftarrow$": $\boxed{*} \Rightarrow$ die $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ sind EWe von f,

und da $\dim \operatorname{im}(f - \lambda_i \mathrm{id}_V) = n - r_i$ ist $\dim E_{\lambda_i} = \dim \ker(f - \lambda_i \mathrm{id}_V) = n - \overbrace{\operatorname{rg}(f - \lambda_i \mathrm{id}_V)}^{n - r_i}$

$= r_i$. Also: $\dim E_{\lambda_1} + \ldots + \dim E_{\lambda_k} = r_1 + \ldots + r_k = n$. Wegen Satz 21.2(iv) ist f diag'bar. $\square$

21.9 **Bsp.:** (1) $\bullet$ $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ über $K = \mathbb{R}$ ~~nicht~~ diag'bar: char. Polynom ist $\chi_A(T) = T^2 + 1$, ohne Nst. über $\mathbb{R}$.

$\bullet$ über $K = \mathbb{C}$: $\chi_A(T) = (T - i)(T - (-i))$, hat 2 versch. EWe $\rightsquigarrow$ diag'bar zu $\tilde{A} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = S^{-1} A S$

mit $S = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ i \end{smallmatrix} \middle| \begin{smallmatrix} 1 \\ -i \end{smallmatrix}\right)$, wobei die Spalten die EVen von A sind (zum EW $i, -i$)

$\ulcorner A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix} = i \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$, $A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i \\ -1 \end{pmatrix} = -i \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \lrcorner$

Fazit: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, x \mapsto A \cdot x$ hat keine EWe über $\mathbb{R}$, und ist geometrisch eine Drehung um $-90°$,

denn: $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ hat $\chi_A(T) = (T-1)^2$, die algebraische Vielfachheit des EWs 1 ist also $= 2$,

aber $\operatorname{rg}(A - 1 \cdot I_n) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 1$, d.h. die geom. Vielfachheit ist $n - 1 = 2 - 1 = 1 \neq 2$.

Also: alg. & geom. Vielfachheit verschieden! $\Rightarrow$ A nicht diag'bar wegen Kor. 21.7.

Es stellt sich die Frage, wie nichtdiagonalisierbare Matrizen dennoch auf eine einfache Normalform gebracht werden könnten. Wir zeigen jetzt, wann immerhin eine (obere) Dreiecksmatrix $\begin{pmatrix} \diagdown & * \\ 0 & \diagdown \end{pmatrix}$ erreichbar ist, vgl. die Def. 14.9 solcher Matrizen. Wie diese oberen Dreiecksmatrizen noch näher spezifiziert werden können, wird dann in Linearer Algebra II als "Jordansche Normalform" vorgestellt und bewiesen.

21.10 **Def.:** Besitzt ein Endo f eine Matrixdarstellung als (endliche) Dreiecksmatrix, so heißt f trigonalisierbar bzw. triangulierbar. (Entsprechend eine Matrix A, falls $f_A: K^n \mapsto K^n, x \mapsto Ax$, trigonalisierbar ist.)

21.11 **Bem.:** Wieder können wir OE Matrizen A, die f darstellen, betrachten.

Unmittelbar aus der Def. ist ersichtlich:

21.12. Kor.: Ist $A \in K^{n\times n}$ trigonalisierbar, so gibt es eine invertierbare Matrix $S \in K^{n\times n}$, so dass $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \ \lambda_n \end{pmatrix}$ eine obere Dreiecksmatrix ergibt. Dabei sind die Diagonalelemente $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ dieser Matrix genau die EWe von A.

Bew.: Haben $\chi_{S^{-1}AS}(T) = (\lambda_1 - T)\cdot(\lambda_2 - T)\cdots(\lambda_n - T)$, die Nst. = EWe von $S^{-1}AS$ (bzw. von A wegen Kor. 20.4) sind genau die $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. □

Wir können die Trigonalisierbarkeit wie folgt durch Kriterien charakterisieren:

21.13. Satz: Sei $A \in K^{n\times n}$. Dann sind äquivalent:

(1) A ist (über K) triangulierbar,

(2) χ_A zerfällt über K in Linearfaktoren,

(3) Es gibt eine Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ des K^n derart, dass $f_A(L(v_1, \dots, v_j)) \subseteq L(v_1, \dots, v_j)$ für alle $j \in \{1, \dots, n\}$ gilt. $[f_A : K^n \to K^n, x \mapsto Ax]$

21.14. Def.: Eine Basis wie in Satz 21.13 (3) heißt Fahnenbasis für A.

In diesem Fall sind die UVRe $U_j := L(v_1, \dots, v_j)$ f_A-invariant, d.h. $f_A(U_j) \subseteq U_j$.

Kor.: Über $\mathbb{C}$ ist jede Matrix triangulierbar (da (2) gilt wegen Fundamentalsatz der Algebra).

21.15. Bew. von Satz 21.13:

(1) ⇒ (2): Ist A ähnlich zur ob. Dreiecksmatrix C mit Diagonalelementen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, so ist $\chi_A(T) = \chi_C(T) = (T - \lambda_1)\cdots(T-\lambda_n)$, vgl. Bew. von Kor. 21.12.

(2) ⇒ (3): Z.z.: χ_A zerfällt in Linearfaktoren ⇒ A trigonalisierbar.

Vollständige Induktion nach n: $n = 1$: $\chi_A(T) = \lambda_1 - T$, wähle $\mathcal{B} = (v_1)$, wo v_1 ein EV zum EW λ_1 ist. Dann ist $\mathcal{B}$ eine Fahnenbasis.

$n-1 \leadsto n$: Da χ_A in Linearfaktoren zerfällt und $\deg \chi_A = n \geq 2$ ist, hat A einen EW λ und einen EV v_1 zu λ. Ergänze v_1 durch Vektoren $v_2, \dots, v_n$ zu einer Basis $\mathcal{C}$ von V. Dann ist
$$_{\mathcal{C}}[f_A]_{\mathcal{C}} = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & * \ * \cdots * \\ \hline 0 & \\ \vdots & A_2 \\ 0 & \end{array}\right).$$

Nun kann die Ind.vor. nicht auf $V_2 := L(v_2, \dots, v_n)$ und $f_A|V_2$ angewendet werden, da $f_A|V_2$ i.a. kein Endomorphismus von V_2 ist.

Konstruiere stattdessen $f_2 \in \mathrm{End}(V_2)$ wie folgt.

Ist $v \in V_2$, so ist $f_A(v) = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$ für eind. best. $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$. Setze dann $f_2(v) := \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$. Dann ist $f_2 \in \mathrm{End}(V_2)$ und $A_2 = {}_{\mathcal{C}_2}[f_2]_{\mathcal{C}_2}$ mit $\mathcal{C}_2 := (v_2, \dots, v_n)$. Da $\chi_A(T) = (\lambda - T)\,\chi_{A_2}(T)$ und χ_A in Linearfaktoren zerfällt, zerfällt χ_{A_2} in Linearfaktoren. Nach Ind.vor. ex. eine Basis $\mathcal{B}' = (w_2, \dots, w_n)$ von V_2, so dass ${}_{\mathcal{B}'}[f_2]_{\mathcal{B}'}$ eine obere Dreiecksmatrix ist. Jetzt sei $\mathcal{B} := (v_1, w_2, w_3, \dots, w_n)$.

- Dies ist eine Basis von V, da $V_2 = L(\mathcal{B}')$ und $\mathcal{C}$ eine Basis von V ist.
- $\mathcal{B}$ ist eine Fahnenbasis: Es ist $f_A(v_1) = \lambda v_1$, also $U_1 := L(v_1)$ ist f_A-invariant. Und für $i = 2, \dots, n$ gilt $f_A(w_i) = \gamma_1 v_1 + \gamma_2 w_2 + \dots + \gamma_i w_i$ nach Wahl von $\mathcal{B}'$, also $f_A(U_i) \subseteq U_i$, $U_i := L(v_1, w_2, \dots, w_i)$, unter Beachtung von $U_1 \subseteq U_2 \subseteq \dots \subseteq U_n$.

(3) $\Rightarrow$ (1): Sei $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ eine Fahnenbasis für A. Dann ist $f_A(v_j) \in L(v_1, \dots, v_j)$, also ex. $\gamma_{ij} \in K$ mit $f_A(v_j) = \sum_{i=1}^{j} \gamma_{ij} v_i$, so dass ${}_{\mathcal{B}}[f_A]_{\mathcal{B}} = (\gamma_{ij})_{i,j}$ eine obere Dreiecksmatrix ist, wenn man noch $\gamma_{ij} := 0$ für $i > j$ setzt. □

21.16. Verfahren zur Bestimmung einer Fahnenbasis von f ($= f_A$) (laut Induktion in 21.15):

1. Setze $m := 0$.
2. Seien $\mu_1, \dots, \mu_k$ die p.w.v. EWe von f.
   Berechne zu jedem Eigenraum E_{μ_i} eine Basis und vereinige diese zu einer Basis $(v_{m+1}, \dots, v_{m+r})$ von $E_{\mu_1} \oplus \dots \oplus E_{\mu_k}$.
   Jeder Vektor v_i gehört zur gesuchten Fahnenbasis.
3. Ergänze diese Basis durch $w_1, w_2, \dots$ zu einer Basis $\mathcal{C}$ von V.
   Dann ist ${}_{\mathcal{C}}[f_A]_{\mathcal{C}} = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 \ddots & \\ 0 & & \lambda_r \end{matrix} & * \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$.
   (Die $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \{\mu_1, \dots, \mu_k\}$ seien entsprechend den Basisvektoren angeordnet.)
4. Setze $\mathcal{D} := (w_1, w_2, \dots)$ und $W := L(\mathcal{D})$.
   Definiere $f_2 \in \mathrm{End}(W)$ durch ${}_{\mathcal{D}}[f_2]_{\mathcal{D}} := C$. (mit C aus Schritt 3.)
5. Setze $f := f_2$, $V := W$, $m := r + 1$ und fahre bei 2. fort.
   (r kann sich in Schritt 2. bei jeder Iteration ändern.)

11.17. <u>Bsp:</u> 1.) Gesucht: Fahnenbasis für $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$?

Haben $\chi_A(T) = (1-T)^2 - 1 = T(T-2)$, haben EW 0 und 2.

Haben Basis $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ aus EVen, ist damit schon Fahnenbasis.

(A ist bereits diagonalisierbar, nämlich ähnlich zu $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.)

2.) Gesucht: Fahnenbasis für $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$?

Haben $\chi_A(T) = (1-T)(-3-T) + 4 = T^2 + 2T + 1 = (T+1)^2$ mit EW -1.

Wähle $v_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, ist EV zu -1. Ergänze v_1 durch $w_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ zu Basis $\mathcal{C}$.

Dann ist ${}_{\mathcal{C}}[f_A]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, denn $f_A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Dies ist obere Dreiecksmatrix, und $\mathcal{C} = (v_1, w_1)$ eine Fahnenbasis für A.

3.) Gesucht: Fahnenbasis für $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$?

Haben $\chi_A(T) = (-1-T)^2 \cdot \big((-2-T)(1-T) + 2 \big) = (T+1)^2 (T^2 + T) = T(T+1)^3$,

also die EWe 0 und -1 mit algebraischer Vielfachheit 1 bzw. 3.

Nun ist $A + I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, also $\operatorname{rg}(A - (-1)\cdot I_4) = 2$, d.h. $4 - 2 = 2$ ist die geometrische Vielfachheit des EWes -1.

Somit ist A <u>nicht</u> diagonalisierbar. Führe wieder das Verfahren durch:

$(e_1, e_3 - e_4)$ ist eine Basis des Eigenraums $E_{-1}(A)$, erkennbar an der Matrix $A - (-1)\cdot I_4 = A + I_4$. Als Basis von $E_0(A)$ berechnet man $(e_3 - 2e_4)$.

Ergänzt man die Vektoren $e_1,\ e_3 - e_4,\ e_3 - 2e_4$ durch (z.B.) e_2 zu einer Basis $\mathcal{B}$ des $\mathbb{R}^4$, so folgt ${}_{\mathcal{B}}[f_A]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$,

in oberer Dreiecksform.

$A \cdot e_2 = e_1 - e_2 = 1 \cdot e_1 + (-1) \cdot e_2$
(e_2 ist 4. Vektor in $\mathcal{B}$)

Somit ist $\mathcal{B} = (e_1, e_3 - e_4, e_3 - 2e_4, e_2)$ eine Fahnenbasis.