Vorlesung Lineare Algebra I

WiSe'19/'20 hhu
K. Halupczok

§5: Endomorphismen

L20: Eigenwerte und Eigenvektoren

Stichworte: EWe, EVen, Spektrum, Lin. Unabh. von EVen zu versch. EWen, Diagonalisierbarkeit, charakteristisches Polynom, Spur, Eigenraum, Existenz von EWen

---

Nach Satz 16.19 gibt es zu jeder lin. Abb. $f: V \to W$ mit $\mathrm{rg}(f) = r$, V, W endlichdimensional, Basen $\mathcal{B} \subseteq V$, $\mathcal{C} \subseteq W$, so dass ${}_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{B}} = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$ gilt. Speziell gilt dies auch für Endomorphismen, wenn $V = W$ ist, aber dann müssen wir i.a. verschiedene Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ wählen, um diese Darstellung zu erreichen. Es stellt sich die Frage, welche "einfachen" Darstellungen noch möglich sind, wenn wir im Bild- und Urbildexemplar von V dieselbe Basis verwenden möchten. Wir nennen solche einfachen Darstellungen Normalformen. Dafür treffen wir für das Folgende die

20.1. Vereinbarung: Ab jetzt verstehen wir unter einer Matrixdarstellung eines Endos stets eine solche, bei der in Bild und Urbild dieselbe Basis gewählt ist. Verschiedene Matrixdarstellungen A_1, A_2 desselben Endos f sind dann ähnlich, d.h. es gibt eine invertierbare Matrix S mit $A_2 = S^{-1} A_1 S$.

Betrachten wir die Diagonalmatrix $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \; \lambda_n \end{pmatrix} \in K^{n \times n}$ (d.h. $\alpha_{ij} = \begin{cases} \lambda_i, & j = i \\ 0, & j \neq i \end{cases}$) und den zugehörigen Endo $f: K^n \to K^n$, $x \mapsto Ax$.

Die Diagonalelemente seien alle $\neq 0$. Hätte f eine Normalform wie im Rangdarstellungssatz 16.19 mit derselben Basis, so müsste A zu I_n ähnlich sein, d.h. $I_n = S^{-1} A S \Leftrightarrow A = S I_n S^{-1} = S S^{-1} = I_n$, was i.a. falsch ist.

Somit kann eine Diagonalmatrix nicht auf "einfachere" Gestalt gebracht werden.

Aber: f hat eine andere wichtige Eigenschaft: $f(e_i) = Ae_i = \lambda_i e_i$ für die Einheitsvektoren! Zu f ex. also Vektoren $v \neq 0$, die durch f in ein Vielfaches von sich übergehen (letzteres ist für $v = 0$ trivial und in diesem Fall uninteressant).

20.2. **Def. (EW/EV):** 1.) Sei V ein K-VR, $f: V \to V$ Endo.

Ein Skalar $\lambda \in K$ heißt Eigenwert (von f),
falls ein Vektor $v \in V$, $v \neq o$, existiert mit $f(v) = \lambda v$.
Jeder solche Vektor v heißt Eigenvektor (von f) zum Eigenwert λ.

Vergessen Sie nicht "$v \neq o$"!

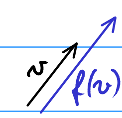
2.) Da für eine quadr. Matrix $A \in K^{n \times n}$ ein Endo $K^n \to K^n$, $x \mapsto Ax$ festgelegt wird, werden über diesen Eigenwerte und Eigenvektoren einer Matrix A erklärt. (D.h. λ ist EW zum EV $v \neq o$ der Matrix A, falls $Av = \lambda v$.)

3.) Die Menge aller Eigenwerte von f heißt Spektrum von f, analog Spektrum von A.

20.3. **Bem.:** (1) Abkürzungen: EW = Eigenwert, EV = Eigenvektor

(2) engl. Bezeichnungen: eigen value = Eigenwert, eigen vector = Eigenvektor

(3) Anschaulich: v ist ein Vektor, den f "in dieselbe Richtung" abbildet: das Bild $f(v)$ ist das λ-fache von v.



(4) Man könnte $L(v)$ auch als Fixrichtung bezeichnen, da $L(v) = L(f(v)) = f(L(v))$.

(5) Mit $\alpha \neq 0$ ist natürlich mit v auch αv Eigenvektor zum selben Eigenwert.

(6) Ist $f: V \to W \neq V$ linear, kein Endo, macht $f(v) = \lambda v$ keinen Sinn, da $\lambda v \notin W$.

(7) Der Nullvektor o ist (per Definition) kein EV! Niemals! ($\lambda \cdot o = o$ gilt für alle λ)

(8) Ein Fixpunkt von f ist ein $x \in V$ mit $f(x) = x$, d.h. für $x \neq o$ ein EV zum EW $\lambda = 1$.

(9) Alle $x \in \ker f$, $x \neq o$, sind EVen zum EW $\lambda = 0$, da $f(x) = o = 0 \cdot x$ gilt.

20.4. **Kor.:** Ähnliche Matrizen haben dieselben EWe, d.h. ($A, B \in K^{n \times n}$ ähnlich, $\exists \lambda \in K \; \exists v \in K^n, v \neq o: Bv = \lambda v$) $\Rightarrow Aw = \lambda w$ für ein $w \in K^n$, $w \neq o$.

Bew.: Sei $A = S^{-1}BS$ mit $S \in K^{n \times n}$ invertierbar. Aus $Bv = \lambda v$ folgt $AS^{-1}v = (\underbrace{S^{-1}BS}_{A}S^{-1})v = S^{-1}Bv = S^{-1}\lambda v = \lambda S^{-1}v$, d.h. $S^{-1}v$ ist EV von A zum EW λ. □

20.5. **Bsp.:** $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ hat dieselben EWe wie $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, nämlich $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 3$,

denn $\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}}_{S^{-1}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}}_{B} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}}_{S} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, EVen: $S^{-1}e_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $S^{-1}e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Probe: $\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ ✓, $\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ✓

Frage: Aber wie bekommt man S? Durch Bestimmung der EVen, vgl. Bsp. 20.26.

Eine wichtige Eigenschaft: EVen zu verschiedenen EWen sind linear unabhängig.

20.6. <u>Satz:</u> V ein K-VR, $f: V \to V$ Endo, $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ p.w.v. EWe von f mit EVen $v_1, \dots, v_k$.
Dann sind $v_1, \dots, v_k$ linear unabhängig. (Analog für Matrizen)

<u>Bew.:</u> Vollständige Induktion nach k: $k=1$: klar da $v_1 \neq 0$ nach Def. "EV".
$k \to k+1$: Sei $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{k+1} v_{k+1} = 0$ mit $\alpha_1, \dots, \alpha_{k+1} \in K$. Nach Anwendung von f folgt $0 = f(0) = f(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{k+1} v_{k+1}) = \alpha_1 f(v_1) + \dots \alpha_{k+1} f(v_{k+1})$,
also $0 = \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \dots + \alpha_{k+1} \lambda_{k+1} v_{k+1}$.
Andererseits gilt $0 = \lambda_1 0 = \lambda_1 \alpha_1 v_1 + \lambda_1 \alpha_2 v_2 + \dots + \lambda_1 \alpha_{k+1} v_{k+1}$, von der vorigen Glg.
Abziehen liefert $(\lambda_2 - \lambda_1)\alpha_2 v_2 + \dots + (\lambda_{k+1} - \lambda_1)\alpha_{k+1} v_{k+1} = 0$.
Nach Induktionsvoraussetzung sind $v_2, \dots, v_{k+1}$ linear unabhängig, es folgt
$(\lambda_2 - \lambda_1)\alpha_2 = \dots = (\lambda_{k+1} - \lambda_1)\alpha_{k+1} = 0$. Da die λ_i p.w.v. folgt $\alpha_2 = \dots = \alpha_{k+1} = 0$, $\alpha_1 v_1 = 0$ $\Rightarrow \alpha_1 = 0$. □

20.7. <u>Kor.:</u> Jeder Endo eines n-dim. K-VRs V hat $\leq n$ viele EWe.
(Analog für jede Matrix $A \in K^{n \times n}$)

<u>Bew.:</u> Wegen <u>Satz 20.6</u> und der Tatsache, dass in V maximal n Vektoren lin. unabh. sind. □

20.8. <u>Kor.:</u> Besitzt ein Endo f eines n-dim. K-VRs V genau n verschiedene EWe $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, so bildet eine Familie $(v_1, \dots, v_n)$ zugehöriger EVen eine Basis von V.
Bezüglich einer solchen Basis hat f die Matrixdarstellung $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ als Diagonalmatrix.

20.9. <u>Bem.:</u> Die Identität id_V (alle $x \neq 0$ sind EVen zum EW 1) zeigt aber, dass durchaus eine Basis aus EVen existieren kann, ohne dass n verschiedene EWe vorhanden sind.
Hat ein Endo f eine Basis aus EVen, kann dieser als Diagonalmatrix dargestellt werden:

20.10. <u>Satz:</u> Zu einem Endo f sei $(v_1, \dots, v_n)$ eine Basis aus EVen von f zu EWen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (nicht notwendig verschieden). Dann hat f bzgl. dieser Basis die Matrixdarstellung

$$A = \underline{\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)} := \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{mit } (\alpha_{ij}) = \begin{cases} \lambda_i, & i = j, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

<u>Bew.:</u> Die Einträge α_{ij} von A sind die Koeffizienten der Darstellung $f(v_j) = \alpha_{1j} v_1 + \dots + \alpha_{nj} v_n$, wobei $f(v_j) = \lambda_j v_j$ zeigt, dass $\alpha_{ij} = \begin{cases} \lambda_i, & i=j, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$ gilt. □

Wir führen den folgenden Begriff ein.

20.11. Def. (diagonalisierbar): Besitzt ein Endo f eine Matrixdarstellung als (endliche) Diagonalmatrix, d.h. $\exists$ Basis $\mathcal{B}$ mit ${}_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{B}} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ für $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$, so heißt f diagonalisierbar.

Satz 20.10 lässt sich umkehren:

20.12. Satz: Jeder diagonalisierbare Endo f von V mit $\dim V = n$ besitzt eine Familie $(v_1, \dots, v_n)$ von Eigenvektoren, die eine Basis von V bilden.

Bew.: Da f diagonalisierbar, ex. ein Isomorphismus $g: V \to K^n$ so, dass $f' := g \circ f \circ g^{-1}$ bezüglich $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ die Matrixdarstellung

$$A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ hat.}$$

Dann ist aber $f'(e_i) = Ae_i = \lambda_i e_i$,
und mit $v_i := g^{-1}(e_i)$ ist dann $f(v_i) = (g^{-1} \circ g \circ \overbrace{f \circ g^{-1}}^{f'})(e_i) = (g^{-1} \circ f')(e_i)$
$= g^{-1}(f'(e_i)) = g^{-1}(\lambda_i e_i) = \lambda_i g^{-1}(e_i) = \lambda_i v_i$, also sind die v_i EVen und als Bilder der Einheitsvektoren unter dem Isomorphismus g^{-1} eine Basis. $\square$

20.13. Zusammenfassung: • Ein Endo f von V, $\dim V = n$, ist genau dann diagonalisierbar, wenn es eine Basis aus EVen von f gibt. • Ein Endo f von V, $\dim V = n$, ist sicher dann diagonalisierbar, wenn es zu ihm n verschiedene EWe gibt.
• Keineswegs sind alle Endos in endl.-dim. VRen diagonalisierbar, vgl. L21.

Zur (rechnerischen) Bestimmung von EW/EV

20.14. Ausgangssituation: Sei V ein K-VR, $\dim V = n$, $f: V \to V$ Endo.
Sei $A := {}_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{B}}$ und bez. Koordinatenvektor $K_{\mathcal{B}}(v) \in K^n$ bzgl. Basis $\mathcal{B}$.
Dann ist die Untersuchung von $f(v) = \lambda v$ gleichwertig mit der von $A \cdot w = \lambda w$
und $w = K_{\mathcal{B}}(v)$:
$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & V \\ {\scriptstyle K_{\mathcal{B}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle K_{\mathcal{B}}} \\ K^n & \xrightarrow[A]{} & K^n \end{array}$$
Es genügt also, EW/EV von quadratischen Matrizen zu berechnen!

(Die EWe sind dieselben, mit $v = K_{\mathcal{B}}^{-1}(w)$ erhält man die EVen in V.)

20.15. <u>Satz (Charakterisierung von EWen)</u>: Sei $A \in K^{m\times m}$. Dann sind äquivalent:
(1) $\lambda \in K$ ist EW von A
(2) es existiert ein $v \in K^m, v \neq o : Av = \lambda v$
(3) es existiert ein $v \in K^m, v \neq o : (A - \lambda \cdot I_m) v = o$, I_m = m-te Einheitsmatrix
(4) das homogene LGS $(A - \lambda \cdot I_m) \cdot v = o$ hat eine nichttriviale Lsg. (in v)
(5) $\mathrm{rg}(A - \lambda I_m) < m$
(6) $\det(A - \lambda I_m) = 0$.

<u>Bew.</u>: (1)⇔(2) laut Def., (2)⇔(3): Umformen, (3)⇔(4): Formulierung mit LGS, (4)⇔(5) laut Kor. 16.16 mit $b = o$, (5)⇔(6) laut Satz 19.3.(3). □

20.16. <u>Bem.</u>: v in (2)-(4) ist EV zu λ, d.h. die EVen zu λ sind die Elemente aus $\ker(A - \lambda I_m) \setminus \{o\}$.
Die Charakterisierung (6) von EWen ist rechnerisch machbar: Fasst man λ als Unbestimmte in dem Ausdruck $\det(A - \lambda I_m)$ auf, d.h. bildet $\det(A - T \cdot I_m)$, so ergibt dies ein Polynom $\in K[T]$ laut Laplace-Entwicklungssatz: $\det(A - T \cdot I_m) = \det((\alpha_{ij} - T \cdot \delta_{ij})_{ij}) = \sum_{i=1}^{m} (\alpha_{ij} - T \cdot \delta_{ij}) \cdot \det A_{ij}$, und sind die $\det A_{ij}$ Polynome, so auch induktiv $\det(A - T \cdot I_m)$.
Ein jeder EW ist dann Nullstelle dieses Polynoms (beachten: det ist für Matrizen über $K[T]$ anstelle K auch sinnvoll, so dass $\det(A - T \cdot I_m) \in K[T]$ ebenso Laplace-entwickelbar).

20.17. <u>Def.</u>: Das Polynom $\chi_A(T) := \det(A - T \cdot I_m)$ heißt charakteristisches Polynom von A, $A \in K^{m\times m}$.
<u>Satz 20.15</u> zeigt:

Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind genau die EWe von A.
(In Formeln: $\chi_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \exists v \neq o : Av = \lambda v$)

20.18. <u>Bem.</u>: 1.) Mühelos lässt sich Satz 20.15 für einen Endomorphismus $f: V \to V$ übertragen:
$\lambda \in K$ ist EW von $f \Leftrightarrow \exists v \neq o : f(v) = \lambda v \Leftrightarrow \exists v \neq o : (f - \lambda \cdot id_V) v = o$
$\Leftrightarrow \ker(f - \lambda id_V) \neq \{o\} \Leftrightarrow \underbrace{\dim \ker(f - \lambda id_V)}_{= m - \dim \mathrm{im}(f - \lambda id_V) \text{ laut Rangsatz}} > 0 \Leftrightarrow \mathrm{rg}(f - \lambda id_V) < m$.

2.) Die Rangbedingung $\mathrm{rg}(f - \lambda id_V) < m$ ist äquivalent zu $\det(f - \lambda id_V) = 0$ nach 18.11. Ist $F = {}_B[f]_B$ irgendeine Matrixdarst. von f (laut 20.1), so ist auch $F - \lambda I_m$ eine Matrixdarstellung von $f - \lambda id_V$: ${}_B[f - \lambda id_V]_B = {}_B[f]_B - \lambda \cdot {}_B[id_V]_B = F - \lambda \cdot I_m$ unter Verwendung von Satz 15.5. Nach Kor. 19.5 ist dann $\det(f - \lambda id_V) = \det(F - \lambda \cdot I_m)$.

Damit ist das charakteristische Polynom eines Endos wohldef., d.h. unabh. von $\mathcal{B}$:

20.19. **Def.:** Sei $f: V \to V$ ein Endo, $\dim V = n$, $F \in K^{n \times n}$ (irgend)eine Matrixdarstellung von f.
Dann heißt $\chi_f(T) := \det(F - T \cdot I_n)$ charakteristisches Polynom von f.
Weiter folgt: (Schreibe analog $\chi_A(T)$, $A \in K^{n\times n}$)

20.20. **Satz:** Ähnliche Matrizen haben dasselbe charakteristische Polynom.
Bew.: Eine zu A ähnliche Matrix ist auch Matrixdarstellung von $f_A: K^n \to K^n$, $x \mapsto Ax$, und hat wegen 20.18.2) dasselbe charakteristische Polynom. Oder direkt argumentiert:

$$A = S^{-1} B S \Rightarrow \det(A - T\cdot I_n) = \det(S^{-1} B S - \underbrace{T \cdot I_n}_{= S^{-1}\cdot T \cdot I_n \cdot S}) = \det(S^{-1}) \det(B - T\cdot I_n) \det S = \det(B - T \cdot I_n). \quad \square$$

Das charakteristische Polynom ist auch an sich interessant:

20.21. **Satz:** Der Grad des charakteristischen Polynoms $\chi_f(T)$ eines Endos $f: V \to V$, wenn $n = \dim V$ ist, beträgt n. Sein Leitkoeffizient vor T^n ist $(-1)^n$, der Absolutkoeffizient vor T^0 ist $\det f$, und sein Koeffizient vor T^{n-1} ist $(-1)^{n-1}$ mal die Spur von f, wo $\mathrm{Spur}(f) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii}$, falls $A = (\alpha_{ij})_{ij} = {}_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{B}}$ ist.

20.22. **Kor.:** Die Spur ähnlicher Matrizen ist gleich. (Damit ist $\mathrm{Spur}(f) := \mathrm{Spur}(A)$ wohldefiniert.)
(Dass die Determinante ähnlicher Matrizen gleich ist, ist schon aus Satz 19.3(6) bekannt.)
Bew.: Wegen Satz 20.20. ist der Koeffizient vor T^{n-1} derselbe, jetzt Satz 20.21. $\square$

20.23. **Beweis von Satz 20.21:** Die Laplace-Entwicklung von

$$B := A - TI_n = \begin{pmatrix} \alpha_{11} - T & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - T & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} - T \end{pmatrix}$$

nach Zeile $i = 1$ liefert

$$\sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} \beta_{1j} \det B_{1j} = \underbrace{(-1)^{1+1}}_{=+1} (\alpha_{11} \overset{\text{ein Minus mehr}}{\overset{\downarrow}{-}} T) \cdot \underbrace{\det(A_{11} - T \cdot I_{n-1})}_{\overset{\text{Ind.vor.}}{=} (-1)^{n-1} \cdot T^{n-1} + (-1)^{n-2} \mathrm{Spur}(A_{11}) \cdot T^{n-2} + \ldots} + \underbrace{\sum_{j=2}^{n} (-1)^{1+j} \alpha_{1j} \det B_{1j}}_{\text{Terme vom Grad} \leq n-2}$$

$$= (-1)^n T^n + \alpha_{11} \cdot (-1)^{n-1} T^{n-1} + (-1)^{n-1} (\alpha_{22} + \ldots + \alpha_{nn}) T^{n-1} + \ldots \text{ (Terme kleineren Grades)},$$

also folgt $\deg(A - TI_n) = n$, Leitkoeff. ist $(-1)^n$, Koeff. vor T^{n-1} ist $(-1)^{n-1}\,\mathrm{Spur}(A)$.
Einsetzen von $\lambda = 0$ in das charakteristische Polynom liefert den Absolutkoeffizienten
$\chi_f(0) = \det(f - 0 \cdot \mathrm{id}_V) = \det f$. $\square$

Zuletzt fassen wir die Menge der Eigenvektoren zum Eigenwert λ mit 0 zusammen:

20.24 **Def.:** Die Menge $E_\lambda := \{ v \in V \mid f(v) = \lambda v \} = \ker(f - \lambda \, \mathrm{id}_V)$
heißt Eigenraum von f zum Eigenwert λ.

20.25 **Bem.:** • Als Kern eines Endos ist E_λ ein Untervektorraum von V.
• Anschaulich: jeder Eigenraum wird mit f in sich abgebildet:
Es gilt $f(E_\lambda) \subseteq E_\lambda$ (d.h. E_λ ist f-invariant).

Der Eigenraum $E_\lambda = \ker(A - \lambda \cdot I_n)$ ist der Lösungsraum des homogenen LGS $(A - \lambda \cdot I_n) \cdot v = 0$.
Mit den Lösungen dieses LGS, etwa mit dem Gauß-Eliminationsverfahren, werden die Eigenvektoren bestimmt.

20.26 **Bsp.:** Sei $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -6 & -6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Das charakteristische Polynom lautet

$$\chi_A(T) = \det(A - T \cdot I_3) = \det\begin{pmatrix} -1-T & 2 & 2 \\ 2 & 2-T & 2 \\ -3 & -6 & -6-T \end{pmatrix}.$$

Subtraktion der dritten Spalte von der zweiten zeigt $\chi_A(T) = \det\begin{pmatrix} -(1+T) & 0 & 2 \\ 2 & -T & 2 \\ -3 & T & -6-T \end{pmatrix}$, und Entwickeln nach der zweiten Spalte liefert

$$\begin{aligned} \chi_A(T) &= (-1)^{2+2} \cdot (-T) \cdot \big(-(1+T) \cdot (-6-T) - (-3) \cdot 2 \big) + (-1)^{3+2} \cdot T \cdot \big(-(1+T) \cdot 2 - 2 \cdot 2 \big) \\ &= -T \cdot \big((1+T)(6+T) + 6 \big) - T \cdot \big(-(1+T) \cdot 2 - 4 \big) \\ &= -T \cdot \big(6 + T + 6T + T^2 + 6 - 2 - 2T - 4 \big) \\ &= -T \cdot (T^2 + 5T + 6) = -T \cdot (T+2)(T+3). \end{aligned}$$

Die Nullstellen sind $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = -3$, das sind hier die EWe.
Laut Kor. 20.8 bilden zugehörige EVen eine Basis (v_1, v_2, v_3) des $\mathbb{R}^3$, so dass also A diagonalisierbar ist, d.h. ähnlich zu $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

Bestimmung der Eigenvektoren:
- Zu $\lambda_1 = 0$: $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -6 & -6 \end{pmatrix} x = 0$ hat die Lösungsmenge $L(v_1)$ mit $v_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
- Zu $\lambda_2 = -2$: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ -3 & -6 & -4 \end{pmatrix} x = 0$ hat die Lösungsmenge $L(v_2)$ mit $v_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- Zu $\lambda_3 = -3$: $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ -3 & -6 & -3 \end{pmatrix} x = 0$ hat die Lösungsmenge $L(v_3)$ mit $v_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Die Eigenräume sind genau diese Lösungsmengen: $E_{\lambda_i} = L(v_i)$, $i = 1,2,3$.
Bilden wir die Matrix $S := (v_1 | v_2 | v_3)$ mit den EVen als Spalten, so ist S invertierbar, weil (v_1, v_2, v_3) eine Basis ist.

Nun ist $S^{-1} A S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$,

denn wegen $v_i = S e_i$, $i = 1,2,3$, gilt
$$S^{-1} A S e_i = S^{-1} A v_i = S^{-1} \lambda_i v_i = \lambda_i S^{-1} v_i = \lambda_i S^{-1} S e_i = \lambda_i e_i .$$

Wann hat ein Endo/eine quadratische Matrix garantiert mindestens einen EW?
Wenn das charakteristische Polynom mind. eine Nullstelle hat:

20.27 Satz: Jeder Endo f zu einem endl. dim. VR über $\mathbb{C}$ (oder sonst einem algebraisch abgeschlossenen Körper) besitzt mindestens einen EW. Ebenso, wenn der Körper $\mathbb{R}$ ist und n eine ungerade natürliche Zahl.

Bew.: Satz 8.32 (der Fundamentalsatz der Algebra, Körper mit dieser Eigenschaft heißen algebraisch abgeschlossen),
bzw. Zwischenwertsatz für reelle Polynome ungeraden Grades, da $\deg \chi_f(T) = n$ nach Satz 20.21. $\square$