Vorlesung Lineare Algebra I

WiSe'19/'20 hhu
K. Halupczok

§5: Endomorphismen

L19: Determinante einer Matrix

Stichworte: Determinante einer Matrix, Entwicklungssatz von Laplace, Streichungsmatrizen, vereinfachtes Gaußeliminationsverfahren, algebraisches Komplement, Cramersche Regel

---

Mit dem Begriff der Determinante eines Endomorphismus kommen wir direkt zur Determinante einer Matrix als Determinante der zugehörigen Matrixabbildung:

19.1. **Def. (Determinante einer Matrix):** Eine quadratische Matrix $A \in K^{n\times n}$ definiert eindeutig einen Endomorphismus $f_A : K^n \to K^n$, $x \mapsto Ax$. Dann heißt $\det A := \det f_A$ die Determinante von A.

19.2. **Satz:** Für jede Matrix $A \in K^{n\times n}$ mit Spalten $a_1, \dots, a_n$ gilt $\det A = \Delta(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Bew.: $\det A = \det f_A \overset{18.10}{=} \Delta(f_A(e_1), \dots, f_A(e_n)) = \Delta(Ae_1, \dots, Ae_n) = \Delta(a_1, \dots, a_n)$, denn Sie wissen ja: die Spalten sind die Bilder der Einheitsvektoren. □

Wir erhalten sofort die folgenden Eigenschaften:

19.3. **Satz:** Für $A, B \in K^{n\times n}$ und die Einheitsmatrix $I_n \in K^{n\times n}$ gelten

(1) $\det I_n = 1$ (2) $\det(A\cdot B) = \det(A)\cdot\det(B)$

(3) $\det A = 0 \iff \mathrm{rg}(A) < n$

(4) $\det A \neq 0 \iff \mathrm{rg}(A) = n \iff A$ invertierbar, vgl. 16.17.

(5) A invertierbar $\Rightarrow \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$

(6) B invertierbar $\Rightarrow \det(B^{-1}AB) = \det A$,

d.h. ähnliche Matrizen haben die gleiche Determinante.

Bew.: Der Beweis ist mit Satz 18.11 schon geführt; er überträgt sich direkt auf Matrizen. Insb. für (6) können wir den Beweis analog umschreiben zu $\det(B^{-1}AB) = \det(B^{-1})\det A \cdot \det B = \frac{1}{\det B}\cdot \det A \cdot \det B = \det A$. □

19.4. **Bem.:** Mit die wichtigste Bedeutung von $\det A$ bzw. $\det f$ ist die Erkennung von invertierbaren Matrizen bzw. Isomorphismen, denn wir haben also:

Für Endo $f : V \to V$ gilt: $\det f \neq 0 \iff f$ Isomorphismus,

für $A \in K^{n\times n}$ gilt: $\det A \neq 0 \iff$ Mult. mit A ist Isomorphismus $\iff A$ invertierbar.

Wir beachten den Zusammenhang zwischen der Determinante eines Endomorphismus $f: V \to V$ und den Matrixdarstellungen von f:
Alle Abb.matrizen ${}_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{B}}$ zu verschiedenen Basen $\mathcal{B}$ sind ähnlich zu $A = {}_{\mathcal{E}}[f]_{\mathcal{E}}$ nach 17.9. Also zeigt 19.3 (6):

19.5. Kor.: Für einen Endomorphismus $f: V \to V$, $\dim V = n$, und irgendeine Basis $\mathcal{B}$ von f gilt $\det f = \det {}_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{B}}$.

Würde man $\det f$ so definieren wie in 19.5, ist dies also wohldefiniert, da von der Basiswahl für $\mathcal{B}$ unabhängig.

19.6. Bsp.: Ist $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in K^{2\times 2}$ eine 2×2-Matrix, ist $\det A = \det\left(\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}\right) = ad - bc$ laut Konstruktion 18.7, Fall $n=2$.

19.7. Bem.: Für eine lin. Abb. $f: V \to W$, selbst wenn $\dim V = \dim W = n$ ist, kann kein $\det f$ definiert werden: Werden Basen $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ in V, W gewählt, kann zwar $\det {}_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{B}}$ berechnet werden, bei Basiswechsel zu anderen Basen erhalten wir aber eine dazu äquivalente Matrix $R^{-1}\, {}_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{B}}\, S$, wobei $\det R \neq \det S$ (mit $\mathcal{B} \neq \mathcal{C}$) zu erwarten ist. Diese hat also i.a. eine andere Determinante als ${}_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{B}}$.
Bsp.: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\mathcal{B} = \mathcal{E}$, $\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$: ${}_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{E}} = {}_{\mathcal{C}}[id]_{\mathcal{E}}\, \underbrace{{}_{\mathcal{E}}[f]_{\mathcal{E}}}_{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}}\, \underbrace{{}_{\mathcal{E}}[id]_{\mathcal{E}}}_{I_2}$
mit BWmatrix ${}_{\mathcal{C}}[id]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ da $f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
und $f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, also
${}_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 22 \\ 7 & 15 \end{pmatrix}$, $\det\begin{pmatrix} 10 & 22 \\ 7 & 15 \end{pmatrix} = 10 \cdot 15 - 7 \cdot 22 = -4$,
mit anderer Determinante als ${}_{\mathcal{E}}[f]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$: $\det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = 4 - 6 = -2$.

Jetzt liefert uns Satz 18.8 eine Rekursionsformel zur Berechnung von $\det A$:

19.8. Satz (Entwicklungssatz von Laplace, Entwicklung nach der i-ten Zeile):
Für eine Matrix $A = (\alpha_{k\ell}) \in K^{n\times n}$ und Indizes $i, j \in \{1, \dots, n\}$ bezeichne $A_{ij} \in K^{(n-1)\times(n-1)}$ diejenige Matrix, die aus A durch Streichen der i-ten Zeile und der j-ten Spalte entsteht. Damit gilt für jedes $i = 1, \dots, n$:

$$\boxed{\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \alpha_{ij} \det A_{ij}.}$$

Bew.: Wegen Satz 19.2 vergewissern wir uns, dass diese Formel genau die aus Satz 18.8 ist. □

Bem.: Man nennt die A_{ij} Streichungsmatrizen und die Streichungsmatrizendeterminanten $\det A_{ij}$ auch $(n-1)$-reihige Unterdeterminanten.

Streichungsmatrizendeterminanten

19.9. **Bsp.:**
- $\det\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix} = (-1)^{1+1}\cdot 1\cdot 4 + (-1)^{1+2}\cdot 2\cdot 3 = 4-6=-2$, für $i=1$. Bzw. $i=2$: $= (-1)^{2+1}\cdot 3\cdot 2 + (-1)^{2+2}\cdot 4\cdot 1 = -6+4=-2$.
- $\det\begin{pmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&10\end{pmatrix} \underset{\uparrow\, i=1}{=} (-1)^{1+1}\cdot 1\cdot \underbrace{\det\begin{pmatrix}5&8\\6&10\end{pmatrix}}_{5\cdot10-6\cdot8=2} + (-1)^{1+2}\cdot 4\cdot\underbrace{\det\begin{pmatrix}2&8\\3&10\end{pmatrix}}_{2\cdot10-3\cdot8=-4} + (-1)^{1+3}\cdot 7\cdot \underbrace{\det\begin{pmatrix}2&5\\3&6\end{pmatrix}}_{2\cdot6-3\cdot5=-3} = \underline{\underline{-3}}.$

Für die Laplace-Entwicklung von det A können auch die Spalten genommen werden:

19.10. **Satz:** Für $A\in K^{n\times n}$ mit Spalten $a_1,\dots,a_n$ und Zeilen $z_1,\dots,z_n$ gilt
$$\det A = \Delta(a_1,\dots,a_n) = \Delta(z_1,\dots,z_n).$$

Bew.: Nach Satz 19.2 ist $\det A = \Delta(a_1,\dots,a_n)$. Genausogut können wir $\det A$ als Funktion der Zeilen $z_1,\dots,z_n$ auffassen, sei diese mit $\Delta'(z_1,\dots,z_n) := \det A$ bezeichnet. (D.h. setze die Vektoren $z_1,\dots,z_n$ als Zeilen einer Matrix A zusammen, und bilde $\det A$.) Nach Satz 19.8 haben wir also $\Delta'(z_1,\dots,z_n) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}\alpha_{ij}\det A_{ij}$. Dieser Ausdruck ist offenbar linear in der i-ten Zeile. Da i beliebig war, folgt:

(1.) $\Delta'(z_1,\dots,z_n) = \det A$ ist linear in jeder Zeile von A.

Sind die Zeilen von A linear abhängig, so ist $rg(A) < n$ und damit $\det A = 0$. Also:

(2.) Sind die Zeilen von A linear abhängig, gilt $\Delta'(z_1,\dots,z_n)=0$.

Weiter entsteht durch Einsetzen der Einheitsvektoren als Zeilen die Matrix I_n, also:

(3.) $\Delta'(e_1,\dots,e_n) = 1$.

Somit ist $\Delta'=\Delta$ die normierte Determinantenfunktion nach Satz 18.2. □

19.11. Im Bsp. 19.9: Entwickeln nach Spalte 2 liefert
$$\det\begin{pmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&10\end{pmatrix} \underset{\uparrow\, j=2}{=} (-1)^{1+2}\cdot 4\cdot\underbrace{\det\begin{pmatrix}2&8\\3&10\end{pmatrix}}_{2\cdot10-3\cdot8=-4} + (-1)^{2+2}\cdot 5\cdot\underbrace{\det\begin{pmatrix}1&7\\3&10\end{pmatrix}}_{1\cdot10-3\cdot7=-11} + (-1)^{3+2}\cdot 6\cdot\underbrace{\det\begin{pmatrix}1&7\\2&8\end{pmatrix}}_{1\cdot8-2\cdot7=-6} = \underline{\underline{-3}}.$$

Bem.: Es gibt ausschließlich für 3×3-Matrizen die sog. Regel von Sarrus zur det-Berechnung. Wir behandeln diese nicht.

Wir fassen nützliche Rechenregeln zur Berechnung von $\det A$ zusammen.

19.12 <u>Satz:</u> Für eine Matrix $A=(\alpha_{k\ell})\in K^{n\times n}$ gilt:

1.) Ist A^T die Transponierte Matrix zu A, gilt $\det A^T=\det A$.

2.) Statt nach einer Zeile kann auch nach einer Spalte Laplace-entwickelt werden: Es gilt für alle $j=1,\dots,n$ die Formel $\det A=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}\alpha_{ij}\det A_{ij}$.

3.) $\det A$ ist linear in jeder Spalte und jeder Zeile von A, insb. $\det(\lambda A)=\lambda^n\det A$.

4.) Hat A zwei gleiche Spalten oder zwei gleiche Zeilen, so ist $\det A=0$.

5.) Addiert man zu einer Spalte ein Vielfaches einer anderen Spalte, so ändert sich $\det A$ nicht. Analog für Zeilen.

6.) Vertauscht man zwei Spalten oder zwei Zeilen, so multipliziert sich die Determinante mit -1.

7.) Die Determinante einer Dreiecksmatrix (vgl. 14.9) ist gleich dem Produkt der Diagonaleinträge, d.h. $\det\begin{pmatrix}\alpha_{11}&\cdots&\alpha_{1n}\\ &\ddots&\vdots\\ 0&&\alpha_{nn}\end{pmatrix}=\alpha_{11}\cdot\alpha_{22}\cdots\alpha_{nn}$.

<u>Bew.:</u>

<u>Zu 1.):</u> Die Spalten z_i von A^T sind die (transponierten) Zeilen a_i^T von A, also ist die Beh. klar nach Satz 19.10.

<u>Zu 2.):</u> folgt aus 1.) und dem Laplace-Entwicklungssatz 19.8.

<u>Zu 3.)-6.):</u> folgt aus Satz 18.2, Def. 18.3 zusammen mit Lemma 18.4.

<u>Zu 7.):</u> Ist $A=(\alpha_{k\ell})$ eine obere Dreiecksmatrix, so ist $\alpha_{k\ell}=0$ für $k>\ell$. Entwickeln nach der 1. Spalte liefert $\det A=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\underbrace{\alpha_{i1}}_{=0 \text{ für } i>1}\det A_{i1}=\alpha_{11}\det A_{11}$.
Da A_{11} selbst wieder obere Dreiecksmatrix ist, ist also induktiv schon $\det A_{11}=\alpha_{22}\cdot\alpha_{33}\cdots\alpha_{nn}$, es folgt $\det A=\prod_{i=1}^{n}\alpha_{ii}$. □

19.13 Dieser Satz 19.12 liefert ein <u>Verfahren zur expliziten Berechnung der Determinanten</u> einer Matrix $A=(\alpha_{ij})\in K^{n\times n}$. Wir gehen dafür ähnlich vor wie bei der Gauß-Elimination, um die Matrix auf obere Dreiecksform zu bringen, ohne den Wert der Determinante zu ändern.

<u>1. Schritt:</u>
- Ist die 1. Spalte von A der Nullvektor o, sind die Spalten lin. abh. und $\det A=0$.
- Ist die 1. Spalte $\neq o$, nehmen wir OE $\alpha_{11}\neq 0$ an (notfalls Zeilen austauschen und <u>mal (-1)</u>!).

Dann kann man von der 2-ten, 3-ten, ..., n-ten Zeile solche Vielfache der 1-ten Zeile abziehen, dass in der 1. Spalte, abgesehen von α_{11}, sämtliche Einträge $= 0$. Dabei ändert sich der Wert der Determinanten nicht. Die so erhaltene Matrix hat die Form $A' = \left(\begin{array}{c|ccc} \alpha'_{11} & * & \cdots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A'_{11} & \\ 0 & & & \end{array}\right)$ mit $\alpha'_{11} \neq 0$ und nicht näher interessierenden Einträgen $*$.

Ferner haben wir $\det A = (-1)^r \det A' \underset{\uparrow \text{Laplace-Entwicklung}}{=} (-1)^r \alpha'_{11} \det A'_{11}$, $r = \begin{cases} 1, & \text{falls zu Beginn zwei Zeilen vertauscht wurden,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$

2. Schritt: Für A'_{11} argumentiere weiter wie eben im 1. Schritt.

- Ist die 1. Spalte von A'_{11} gleich 0, ist $\det A'_{11} = 0$, dann also auch $\det A = 0$.
- Ansonsten formen wir A' um wie im 1. Schritt, erhalten anstelle A dann

$$A'' = \left(\begin{array}{cccc} \alpha'_{11} & * & \cdots & * \\ \hline 0 & \alpha'_{22} & * \cdots & * \\ \hline 0 & 0 & & \\ \vdots & \vdots & A''_{22} & \\ 0 & 0 & & \end{array}\right),$$

und $\det A = (-1)^r \alpha'_{11} \alpha'_{22} \det A''_{22}$, wobei r die # bisher vertauschter Zeilen angibt.

Durch Iteration dieser Schlussweise erhalten wir das

19.14. Rezept zur Berechnung einer Determinanten: Führe das folgende vereinfachte Gauß-Eliminationsverfahren an der Matrix A durch: Bringe die Matrix mit Zeilenumformungen (C') auf Dreiecksgestalt, Stufenränder werden nicht auf 1 gebracht. Ist C dann die erhaltene Dreiecksmatrix (das kann ja auch eine untere Δ-Matrix sein), so ist $\det A = (-1)^r \det C$, wobei r die Anzahl der durchgeführten Zeilenvertauschungen ist. Die Determinante von C berechnet sich dann noch als Produkt der Diagonaleinträge von C.

Nützlich zur Berechnung sind Rechenregeln, wenn A in besonderer Form vorliegt, z.B.:

19.15 Satz (Determinante von Kästchenmatrizen):
Ist $A = \left(\begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline C & D \end{array}\right)$ mit Matrizen $B \in K^{m\times m}$, $C \in K^{(n-m)\times m}$, $D \in K^{(n-m)\times(n-m)}$ und der Nullmatrix $0 \in K^{m\times(n-m)}$, so gilt $\det A = \det B \cdot \det D$.

Bew.: Haben $A = \begin{bmatrix} B & 0 \\ C & I_{n-m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}$, dann det anwenden und Satz 19.3 (2).

19.16. Bem.: Der Satz gilt natürlich ebenso für $A = \left(\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline 0 & D \end{array}\right)$. [Nach Betrachtung von $\det A^T$].

Anwendungen der Determinantentheorie

19.17. **Def.:** Sei $A=(\alpha_{ke})\in K^{n\times n}$ und A_{ij} die Streichungsmatrix zu Zeile i, Spalte j, so heißt $\vartheta_{ij}(A):=(-1)^{i+j}\det A_{ij}$ das algebraische Komplement von α_{ij}.

19.18. **Satz:** Sei $A=(\alpha_{ke})\in K^{n\times n}$, $x=(\xi_1,\dots,\xi_n)^T\in K^n$ ein Vektor und $A_{j,x}$ sei die Matrix, die aus A durch Ersetzen der j-ten Spalte durch x entsteht. Dann gilt $\det A_{j,x}=\sum_{i=1}^{n}\xi_i\,\vartheta_{ij}(A)$. (Analoges gilt für die Zeilen.)

Bew.: Entwickle $\det A_{j,x}$ laut 19.12.2) nach der j-ten Spalte. $\square$

19.19. **Lemma:** Ist $A=(\alpha_{ke})\in K^{n\times n}$, a_k die k-te Spalte von A, so ist für $j=1,\dots,n$:
$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ik}\,\vartheta_{ij}(A)=\begin{cases}\det A, & j=k\\ 0, & \text{sonst}\end{cases}$$
(Analoges für Zeilen)

Bew.: Setze in 19.18 $x=a_k$ ein und erhalte $\det A_{j,a_k}$, wo man A_{j,a_k} erhält, indem man in A die j-te Spalte durch die k-te Spalte ersetzt. Für $j=k$ tut sich dabei nichts und erhält A selbst, für $j\neq k$ erhält man eine Matrix mit zwei gleichen Spalten, deren Determinante $=0$ ist. $\square$

Kommen damit zur geschlossenen Darstellung der Inversen einer Matrix:

19.20. **Satz:** Ist $A\in K^{n\times n}$ invertierbar und ϑ_{ij} das algebraische Komplement, so ist
$$\boxed{A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot(\vartheta_{ij})^T},$$
d.h. nimmt man ϑ_{ij} als Matrixeintrag in Zeile i, Spalte j, bildet davon die transponierte Matrix und multipliziert mit $\frac{1}{\det A}$, erhält man A^{-1}.

Bew.: Setzen $D:=(\vartheta_{ij})_{i,j}$, dann ist in $D^T\cdot A$ der Eintrag in (j,k) gleich $\sum_{i=1}^{n}\vartheta^T_{ji}\,\alpha_{ik}\overset{19.19}{=}\begin{cases}\det A, & j=k\\ 0, & \text{sonst},\end{cases}$ also kommt für $D^T\cdot A$ die Matrix $(\det A)\cdot I_n$ heraus. Es folgt $\frac{1}{\det A}\cdot D^T=A^{-1}$. $\square$

19.21. **Bsp.:** Hatten $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}}_{\text{Ja: }=\begin{pmatrix}\vartheta_{11}&\vartheta_{12}\\\vartheta_{21}&\vartheta_{22}\end{pmatrix}^T}$, wo $\vartheta_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\det(d)=d$, $\vartheta_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\det(c)=-c$, $\vartheta_{21}=(-1)^{2+1}\det(b)=-b$, $\vartheta_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\det(a)=a$.

Jetzt 3×3-Matrix:
$$\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot\begin{pmatrix}\vartheta_{11}&\vartheta_{21}&\vartheta_{31}\\\vartheta_{12}&\vartheta_{22}&\vartheta_{32}\\\vartheta_{13}&\vartheta_{23}&\vartheta_{33}\end{pmatrix}\text{ mit }\vartheta_{11}=(-1)^{1+1}\det\begin{pmatrix}e&f\\h&i\end{pmatrix},\ \vartheta_{12}=(-1)^{1+2}\det\begin{pmatrix}d&f\\g&i\end{pmatrix},\text{ usw.}$$

Lösen eines LGS mit Determinantentheorie im Fall $n=m$:

19.22. **Cramersche Regel:** Ist $\det A\neq 0$, so ist die Lösung x von $Ax=b$, $A\in K^{n\times n}$, geg. durch $x=\begin{pmatrix}\xi_1\\\vdots\\\xi_n\end{pmatrix}$ mit $\xi_i=\frac{1}{\det A}\cdot\det A_{i,b}$ für $i=1,\dots,n$.

Aber: Konkretes Berechnen der Lösung damit ungeeignet/zu aufwendig, weil Determinantenberechnung zu aufwendig! Lieber Gaußelim. in der Praxis nehmen!

<u>Beweis der Cramerschen Regel:</u> Mit <u>19.20</u> folgt $x = A^{-1} b = \frac{1}{\det A} \cdot (\vartheta_{ij})^T \cdot b$, und ist $\xi_\ell \in K$ die ℓ-te Komponente der Lösung x, ist $\xi_\ell \det A$ also gleich der ℓ-ten Komponente des Vektors $(\vartheta_{ij})^T_{i,j} \cdot b = (\vartheta_{ji})_{i,j} \cdot b$,

nämlich $\sum_{j=1}^{m} \vartheta_{j\ell} \beta_j = \det A_{\ell,b}$ wegen Satz <u>19.18.</u>
Jetzt $\xi_\ell \det A = \det A_{\ell,b}$ nach ξ_ℓ auflösen. □

19.23. <u>Bsp.:</u> Das LGS $Ax = b$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\det A = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = -2$ hat den Lösungsvektor $x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$ mit $\xi_1 = \frac{\det \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}}{-2} = -\frac{1}{2} \cdot (5 \cdot 4 - 6 \cdot 2) = -\frac{1}{2} \cdot 8 = -4$,
$\xi_2 = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}}{-2} = -\frac{1}{2} \cdot (1 \cdot 6 - 3 \cdot 5) = \frac{9}{2}$, Probe: $1 \cdot (-4) + 2 \cdot \frac{9}{2} = 5$ ✓
$3 \cdot (-4) + 4 \cdot \frac{9}{2} = 6$ ✓

19.24. <u>Elementargeometrische Anwendung:</u> Sind $a, b \in K^2$, $a \neq b$, so liegt ein $x \in K^2$ genau dann auf der Geraden durch a und b, wenn gilt: $\det \begin{pmatrix} x & a & b \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$.
<u>Bew.:</u> • Gilt $x = \alpha a + \beta b$ mit $\alpha + \beta = 1$, sind $\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ 1 \end{pmatrix} \in K^3$ lin. abh., also $\det(\ldots) = 0$.
• Gilt $\det \begin{pmatrix} x & a & b \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$, sind die Vektoren lin. abh., d.h. $\exists\, \xi, \alpha, \beta \in K$, nicht alle $= 0$, mit $\xi x = \alpha a + \beta b$ und $\xi = \alpha + \beta$. Falls $\xi = 0$ wäre $a = b$ ↯. Man darf OE $\xi = 1$ annehmen. □