Vorlesung Lineare Algebra I

WiSe'19/'20 hhu
K. Halupczok

§5: Endomorphismen

L18: Determinantenfunktionen

Stichworte: Determinantenfunktion, normierte Determinantenfunktion, Eindeutigkeit, Existenz durch Konstruktion, Det eines Endos von K^n bzw. V

18.1. Motivation: Aus L16.26: Eine 2×2-Matrix $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\in K^{2\times 2}$ ist genau dann invertierbar, wenn $ad-bc\neq 0$ ist. Man nennt diese Zahl $\in K$ die Determinante von A, in Zeichen: $\det A$. Um diese "Kennzahl" von Matrizen genauer zu untersuchen und in einem allgemeineren Rahmen einzuführen, studieren wir die Eigenschaften von $\det A$: Fasst man $\det A$ als $\det(v_1,v_2)$ auf, wo $A=(v_1|v_2)$, d.h. $v_1=\begin{pmatrix} a \\ c\end{pmatrix}$, $v_2=\begin{pmatrix} b \\ d\end{pmatrix}$ sind die beiden Spalten von A, so gilt:

1.) $\left.\begin{array}{l} \bullet \det(\lambda v_1, v_2)=\lambda\det(v_1,v_2)=\det(v_1,\lambda v_2) \\ \bullet \det(v_1+v_1',v_2)=\det(v_1,v_2)+\det(v_1',v_2) \\ \bullet \det(v_1,v_2+v_2')=\det(v_1,v_2)+\det(v_1,v_2') \end{array}\right\}$ d.h. $\det(v_1,v_2)$ ist linear in jeder Variablen

2.) v_1,v_2 lin. abh. $\Rightarrow \det(v_1,v_2)=0$

⌈denn $\lambda v_1=v_2$ zeigt $\det(v_1,v_2)=\det(v_1,\lambda v_1)=\lambda\det(v_1,v_1)=\lambda(ac-ca)=0$.⌋

3.) $\det(e_1,e_2)=1$.

Bsp.: $\det\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2\end{pmatrix}=0$, $\det\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 4 & 3\end{pmatrix}=4\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3\end{pmatrix}$
$=4\cdot(2\cdot 3-1)=20$.

18.2. Satz (Ex. & Eind. Determinantenfunktion): Zu jedem Körper K und jedem $n\in\mathbb{N}$ ex. genau eine Abb. $\Delta:\underbrace{K^n\times\ldots\times K^n}_{n\text{ mal}}\to K$, $(x_1,\ldots,x_n)\mapsto\Delta(x_1,\ldots,x_n)$ mit folgenden Eigenschaften:

$(K^n)^n$

(D1) Δ ist linear in jedem einzelnen Argument, man sagt *n-linear* oder *n-fach multilinear* (für $n=2$ auch *bilinear*).

⌈d.h. $\forall i=1,\ldots,n$: $\Delta(x_1,\ldots,x_{i-1},\alpha x+\beta y,x_{i+1},\ldots,x_n)=\alpha\Delta(\ldots,x_{i-1},x,x_{i+1},\ldots)+\beta\Delta(\ldots,x_{i-1},y,x_{i+1},\ldots)$⌋

(D2) Sind $x_1,\ldots,x_n$ lin. abhängig, so ist $\Delta(x_1,x_2,\ldots,x_n)=0$, man sagt *alternierend*.

(D3) Für die Einheitsvektoren $e_1,\ldots,e_n\in K^n$ ist $\Delta(e_1,e_2,\ldots,e_n)=1$, man sagt *normiert*.

L18

18.3. <u>Def. (Determinantenfunktion)</u>: Eine Funktion Δ mit (D1), (D2) heißt **Determinantenfunktion**. Gilt zusätzlich (D3), heißt Δ **normiert**.

Vor dem Beweis von 18.2 zeigen wir ein nützliches Lemma:

18.4. <u>Lemma:</u> Für eine Abb. $\Delta : (K^n)^n \to K$ mit den Eigenschaften (D1), (D2) gelten:

(C) ← (1) Addiert man zu einem Argument ein anderes Argument, so ändert sich der Wert der Det.fkt. nicht,

d.h. $\forall i \neq j$: $\Delta(\ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots) = \Delta(\ldots, x_{i-1}, x_i + x_j, x_{i+1}, \ldots)$

(B) ← (2) Multipliziert man <u>ein</u> Argument mit einem Faktor $\lambda \in K$, so multipliziert sich der Wert der Det.fkt. mit λ,

d.h. $\forall i\ \forall \lambda \in K$: $\Delta(\ldots, x_{i-1}, \lambda x_i, x_{i+1}, \ldots) = \lambda\, \Delta(\ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots)$

(A) ← (3) Vertauscht man zwei Argumente, multipliziert sich der Wert der Det.fkt. mit -1,

d.h. $\forall i \neq j$: $\Delta(\ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots) = (-1) \cdot \Delta(\ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots)$.

<u>Bew.:</u> <u>(1)</u>: Nach (D1) ist $\Delta(\ldots, x_j, \ldots, x_i + x_j, \ldots) = \Delta(\ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots) + \underbrace{\Delta(\ldots x_j \ldots x_j \ldots)}_{=0 \text{ nach (D2)}}$.

<u>(2)</u>: ist Spezialfall von (D1),

<u>(3)</u>: $\Delta(\ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots) \overset{(1)}{=} \Delta(\ldots, x_i - x_j, \ldots, x_j, \ldots) \overset{(1)}{=} \Delta(\ldots, x_i - x_j, \ldots, x_j + (x_i - x_j), \ldots)$

$= \Delta(\ldots, x_i - x_j, \ldots, x_i, \ldots) \overset{(1)}{=} \Delta(\ldots, -x_j, \ldots, x_i, \ldots)$

$\overset{(2)}{=} -\Delta(\ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots)$. $\square$

Zunächst zeigen wir die Eindeutigkeit der Determinantenfunktion:

18.5 <u>Satz:</u> Sind Δ, Δ' zwei Determinantenfunktionen auf dem K^n und ist dabei Δ normiert, so ex. ein $c \in K$ mit $\Delta'(x_1, \ldots, x_n) = c \cdot \Delta(x_1, \ldots, x_n)$ für alle $x_1, \ldots, x_n \in K^n$.

18.6. <u>Kor.:</u> Es gibt höchstens eine normierte Determinantenfunktion auf K^n.
⌜Klar, da diese auf $e_1, \ldots, e_n$ den Wert 1 annimmt⌟ $\rightsquigarrow$ <u>Eind. in 18.2.</u>

<u>Beweis von Satz 18.5:</u> Setzen $c := \Delta'(e_1, \ldots, e_n)$ und zeigen damit die Beh. $\Delta'(x_1, \ldots, x_n) = c\, \Delta(x_1, \ldots, x_n)$, welche trivialerweise für die Einheitsvektoren gilt.

- Sei $(x_1, \ldots, x_n) \in (K^n)^n$ lin. abh. Dann gilt $\Delta'(x_1, \ldots, x_n) = 0 = c \cdot 0 = c \cdot \Delta(x_1, \ldots, x_n)$. ✓

- Sei $(x_1, \ldots, x_n) \in (K^n)^n$ lin. unabh. Die Matrix X, die die x_i als Zeilenvektoren hat, ist dann invertierbar nach 16.17. (6). Durch die elementaren Zeilenumformungen (A), (B) und (C) (des Gaußalgorithmus) kann X somit auf die Einheitsmatrix I_n umgeformt werden nach 16.25. (3).
  Dies sind aber gerade die in Lemma 18.4 beschriebenen Umformungen (3), (2), (1), so dass sich
  - bei Umformung (C) die Werte von $\Delta(x_1, \ldots, x_n)$ und $\Delta'(x_1, \ldots, x_n)$ beide nicht ändern,
  - bei Umformungen (A), (B) die Werte von $\Delta(x_1, \ldots, x_n)$ und $\Delta'(x_1, \ldots, x_n)$ jeweils um denselben Faktor $\neq 0$ ändern.

Am Ende werden $\Delta(e_1, \ldots, e_n)$ bzw. $\Delta'(e_1, \ldots, e_n)$ erreicht, wofür die Beh. gilt. Dann muss aber schon zu Beginn $\Delta'(x_1, \ldots, x_n) = c \cdot \Delta(x_1, \ldots, x_n)$ gewesen sein. □

Nun zur Existenz der Determinantenfunktion:

18.7. **Konstruktion:**
- Für $n=1$ ist $(K^1)^1 = K$ und $\Delta_1 : (K^1)^1 \to K$, $x := (\xi) \mapsto \xi$ ist die normierte Determinantenfunktion.
- Für $n=2$ sei $x_j = \begin{pmatrix} \xi_{1j} \\ \xi_{2j} \end{pmatrix}$, $j = 1,2$ und $\Delta_2 : (K^2)^2 \to K$, $\Delta_2(x_1, x_2) := \xi_{11}\xi_{22} - \xi_{12}\xi_{21}$ ist die normierte Determinantenfkt., vgl. 18.1.
- Von hier aus konstruieren wir nun rekursiv normierte Determinantenfunktionen für alle $n \in \mathbb{N}$. Zu $n > 1$ und $1 \leq i \leq n$ bezeichne P_i die lineare Abbildung

$$P_i : K^n \to K^{n-1},\ x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_{i-1} \\ \xi_i \\ \xi_{i+1} \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_{i-1} \\ \xi_{i+1} \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix},$$ die die i-te Komponente löscht.

Weiter sei mit einem $1 \leq j \leq n$ und der (schon konstruierten) Determinantenfunktion Δ_{n-1} auf dem $(K^{n-1})^{n-1}$ für $(x_1, \ldots, x_n) \in (K^n)^n$:

$$\Delta_{n-1}^{(ij)}(x_1, \ldots, x_n) := \Delta_{n-1}(P_i(x_1), \ldots, P_i(x_{j-1}), P_i(x_{j+1}), \ldots, P_i(x_n)),$$

man streiche also in allen Vektoren zunächst die i-te Komponente, lasse dann den j-ten Vektor ganz weg und wende darauf Δ_{n-1} an.

Damit gilt:

18.8. <u>Satz</u>: Für jedes $m>1$ gilt: Ist Δ_{m-1} die normierte Determinantenfunktion zu $m-1$, so ist für jedes $i=1,\dots,m$ die Funktion

$$\Delta_m(x_1,\dots,x_m) := \sum_{j=1}^{m} (-1)^{i+j}\, \xi_{ij}\, \Delta_{m-1}^{(ij)}(x_1,\dots,x_m)$$

die normierte Determinantenfunktion zur Dimension m und damit unabhängig von dem gewählten Index i.

<u>Bew.:</u> (D1): Für jedes $k=1,\dots,m$ ist Δ_m linear im k-ten Argument:

Sei $x_k = \alpha x_k' + \beta x_k''$. Dann ist auch $P_i(x_k) = \alpha P_i(x_k') + \beta P_i(x_k'')$.

- Sofern $j \neq k$, d.h. sofern $P_i(x_k)$ in $\Delta_{m-1}^{(ij)}(x_1,\dots,x_m)$ auch tatsächlich benutzt wird, ist wegen (D1) für Δ_{m-1} dann $\Delta_{m-1}^{(ij)}(\dots x_k \dots) = \alpha \Delta_{m-1}^{(ij)}(\dots x_k' \dots) + \beta \Delta_{m-1}^{(ij)}(\dots x_k'' \dots)$.
- Für $j=k$ ist $\Delta_{m-1}^{(ij)}$ unabh. von x_k, haben dafür hier $\xi_{ik} = \alpha \xi_{ik}' + \beta \xi_{ik}''$.
- Folglich ist

$$\begin{aligned}\Delta_m(\dots \alpha x_k' + \beta x_k'' \dots) &= \sum_{j \neq k} (-1)^{i+j} \left(\alpha \Delta_{m-1}^{(ij)}(\dots x_k' \dots) + \beta \Delta_{m-1}^{(ij)}(\dots x_k'' \dots) \right) \\ &\quad + (-1)^{i+k} (\alpha \xi_{ik}' + \beta \xi_{ik}'')\, \Delta_{m-1}^{(ik)}(\dots) \\ &= \alpha \Delta_m(\dots x_k' \dots) + \beta \Delta_m(\dots x_k'' \dots).\end{aligned}$$

(D2): Sind $(x_1,\dots,x_m)$ lin. abh., so ist $\Delta_m(x_1,\dots,x_m) = 0$:

- Zeigen zunächst den <u>Spezialfall:</u> Ist $r<s$ und $x_r = x_s$, gilt $\Delta_m(x_1,\dots,x_m) = 0$.

In den Summanden für $j \neq r$, $j \neq s$ kommen dann schon in $\Delta_{m-1}^{(ij)}$ zwei gleiche Argumente vor, so dass diese Terme verschwinden. Ferner ist wegen $x_r = x_s$ auch $\xi_{ir} = \xi_{is} =: \xi_i$, und es bleibt

$$\begin{aligned}\Delta_m(x_1,\dots,x_m) &= (-1)^{i+r}\, \xi_i\, \Delta_{m-1}^{(ir)}(\dots) + (-1)^{i+s}\, \xi_i\, \Delta_{m-1}^{(is)}(\dots) \\ &= (-1)^{i+r}\, \xi_i \left(\Delta_{m-1}^{(ir)}(\dots) + (-1)^{s-r} \Delta_{m-1}^{(is)}(\dots) \right). \qquad \otimes\end{aligned}$$

Wir zeigen, dass der Klammerausdruck verschwindet. Zur Vereinfachung der Notation setzen wir $y_j := P_i(x_j)$ und $y := y_r = y_s$, so haben wir

$$\Delta_{m-1}^{(ir)}(x_1,\dots,x_m) = \Delta_{m-1}(y_1,\dots,y_{r-1},y_{r+1},\dots,y_{s-1},y,y_{s+1},\dots,y_m),$$

$$\Delta_{m-1}^{(is)}(x_1,\dots,x_m) = \Delta_{m-1}(y_1,\dots,y_{r-1},y,y_{r+1},\dots,y_{s-1},y_{s+1},\dots,y_m).$$

Beide Ausdrücke enthalten genau dieselben Argumente, jedoch in anderer Reihenfolge. Vertauscht man in $\Delta_{m-1}^{(is)}$ nach und nach, insg. $(s-r-1)$ mal, das y mit dem jeweils rechts davon stehenden Argument, so erhält man $\Delta_{m-1}^{(ir)}$, und nach Lemma 18.4 (3) bringt jede Vertauschung einen Faktor -1. Damit ist aber $\Delta_{m-1}^{(ir)}(x_1,\dots,x_m) = (-1)^{s-r-1} \Delta_{m-1}^{(is)}(x_1,\dots,x_m)$, also $\otimes = 0$.

- Jetzt der <u>allgemeine Fall</u>: Sind $(x_1,\dots,x_m)$ lin. abhängig, so lässt sich ein x_r aus den übrigen linear kombinieren (nach 10.21.): $x_r = \sum_{s\neq r} \lambda_s x_s$.

Dann: $\Delta_m(x_1,\dots,x_m) = \Delta_m(x_1,\dots,x_{r-1}, \sum_{s\neq r}\lambda_s x_s, x_{r+1},\dots,x_m)$

$$\overset{(D1)}{=} \sum_{s\neq r} \lambda_s \underbrace{\Delta_m(x_1,\dots,x_{r-1}, x_s, x_{r+1},\dots,x_m)}_{\text{alle } =0 \text{ nach Spezialfall.}}$$

<u>(D3)</u>: Zeigen: $\Delta_m(e_1,\dots,e_m)=1$. Haben $\xi_{ij}=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$ (Kroneckersymbol), also ist $\Delta_m(e_1,\dots,e_m) = \sum_{j=1}^m \delta_{ij} \Delta_{m-1}^{(ij)}(e_1,\dots,e_m) = \Delta_{m-1}^{(ii)}(e_1,\dots,e_m)$

$$= \Delta_{m-1}(P_i(e_1),\dots,P_i(e_{i-1}), P_i(e_{i+1}),\dots,P_i(e_m))$$

$$= \Delta_{m-1}(\underbrace{e_1',\dots,e_{m-1}'}_{\text{Einheitsvektoren des } K^{m-1}}) = 1. \qquad \square$$

$\rightsquigarrow$ Ex. in 18.2. $\square\square\square$

18.9. <u>Motivation</u>: Die Determinante eines Endomorphismus $f: K^m \to K^m$:
Bezeichne Δ die nach 18.2 eindeutig bestimmte Determinantenfunktion auf $(K^m)^m$. Ist nun $f: K^m\to K^m$ ein Endo, können wir die Abb.

$$\Delta * f: (K^m)^m \to K,\ (x_1,\dots,x_m)\mapsto \Delta(f(x_1),\dots,f(x_m)) \text{ bilden.}$$

Es ist leicht zu prüfen, dass $\Delta * f$ m-multilinear und alternierend, also eine Determinantenfunktion ist. Nach Satz 18.5 gilt dann mit $c := \Delta(f(e_1),\dots,f(e_m))$ die Darstellung $(\Delta * f)(x_1,\dots,x_m) = c\cdot \Delta(x_1,\dots,x_m)$.

18.10. <u>Def. und Satz</u>: (Determinante eines Endomorphismus von K^m): Die hier auftretende Konstante c heißt <u>Determinante des Endomorphismus f</u>, Notation: <u>$\det f$</u>, also $\det f := \Delta(f(e_1),\dots,f(e_m))$. Es gilt $(\Delta * f)(x_1,\dots,x_m) = (\det f)\cdot\Delta(x_1,\dots,x_m)$.

18.11. <u>Satz</u> (Eigenschaften von $\det f$): Für Endomorphismen $f,g: K^m\to K^m$ gilt:
(1.) Ist $\operatorname{rg}(f) < m$, so ist $\det f = 0$.
(2.) $\det \mathrm{id}_{K^m} = 1$ (3.) $\det(g\circ f) = \det g \cdot \det f$.
(4.) $\det f \neq 0 \iff f$ Isomorphismus (in diesem Fall ist $\det(f^{-1}) = \frac{1}{\det f}$)
(5.) Für einen Isomorphismus g ist $\det(g^{-1}\circ f\circ g) = \det f$.

Bew.: (1.): $\det f = (\Delta * f)(e_1,\dots,e_n) = \Delta(f(e_1),\dots,f(e_n))$. Ist $rg(f) < n$, so sind $(f(e_1),\dots,f(e_n))$ linear abhängig, also ist dies $=0$.
(2.): $\det id_{K^n} = (\Delta * id_{K^n})(e_1,\dots,e_n) = \Delta(e_1,\dots,e_n) = 1$.
(3.): Nach 18.10 ist $\det(g \circ f) = \Delta(g(f(e_1)),\dots,g(f(e_n)))$
$$= (\Delta * g)(f(e_1),\dots,f(e_n)) = \det g \cdot \Delta(f(e_1),\dots,f(e_n))$$
$$= \det g \cdot \det f \cdot \Delta(e_1,\dots,e_n) = \det g \cdot \det f.$$
(4.): Ist $\det f \neq 0$, so ist wegen (1.) dann $rg(f) = n$, d.h. f ein Isomorphismus. Ist umgekehrt f ein Isomorphismus, so ex. f^{-1} und $f \circ f^{-1} = id_{K^n}$. Dann ist $1 = \det id_{K^n} = \det f \circ f^{-1} = \det f \cdot \det f^{-1}$. Es folgt die Beh.
(5.): $\det(g^{-1} \circ f \circ g) \underset{(3.)}{=} \det(g^{-1}) \cdot \det f \cdot \det g \underset{(4.)}{=} \frac{1}{\det g} \cdot \det f \cdot \det g = \det f$.
□

Wir möchten zuletzt noch beliebige Endomorphismen eines n-dim. K-VRs betrachten:

18.12. **Lemma:** Sei V ein n-dim. K-VR, sei $f \in Hom(V,V)$ ein Endomorphismus von V, und seien $g, h: K^n \to V$ Isomorphismen. Dann gilt
$$\det(g^{-1} \circ f \circ g) = \det(h^{-1} \circ f \circ h).$$
Bew.: Sei $f_1 := g^{-1} \circ f \circ g$ und $f_2 := h^{-1} \circ f \circ h$. Wegen $g = h \circ h^{-1} \circ g$ folgt
$$f_1 = g^{-1} \circ f \circ g = (h \circ h^{-1} \circ g)^{-1} \circ f \circ (h \circ h^{-1} \circ g) = g^{-1} \circ h \circ \underbrace{h^{-1} \circ f \circ h}_{f_2} \circ h^{-1} \circ g$$
$$= (h^{-1} \circ g)^{-1} \circ f_2 \circ (h^{-1} \circ g).$$ Es folgt die Beh. aus Satz 18.11 (5.). □

Wir können damit die Determinante eines Endomorphismus von V definieren:

18.13. **Def.:** Sei V ein K-VR, $\dim V = n$ und $f \in Hom(V,V)$. Weiter sei $g: K^n \to V$ ein Isomorphismus. Dann heißt $\det f := \det(g^{-1} \circ f \circ g)$ die Determinante von f.
Bem.: Diese Definition ist wohldefiniert, d.h. unabhängig von der Wahl von g nach Lemma 18.12.

18.14. **Bem.:** Satz 18.11 (Eigenschaften von $\det f$) bleibt gültig, wenn man darin überall den K^n durch einen beliebigen n-dim. K-VR V ersetzt. **Bew.:** Ü