Vorlesung Lineare Algebra I

WiSe'19/'20 hhu
K. Halupczok

§4: Lineare Abbildungen und Matrizen
L17: Basiswechsel

Stichworte: Basiswechsel, Matrixdarstellungen zu verschiedenen Basen, Basiswechselsatz, Spezialfälle, äquivalente und ähnliche Matrizen, Rang äquivalenter Matrizen

---

17.1. Bem. zur Darstellung einer lin. Abb. $f: V \to W$ als Matrix ${}_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{B}}: K^n \to K^m$:

1.) L14.23: Die Matrix stellt die lin. Abb. dar, d.h. ${}_{\mathcal{C}}[f(v)] = {}_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{B}} \cdot {}_{\mathcal{B}}[v]$ für alle $v \in V$, d.h. multipliziert man die Matrix ${}_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{B}}$ mit dem Koordinatenvektor von v bzgl. $\mathcal{B}$, so erhält man das Bild $f(v)$, und zwar als Koordinatenvektor bzgl. $\mathcal{C}$.

2.) L14.25: Bei der Matrixdarstellung ${}_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{B}}$ einer lin. Abb. $f: V \to W$ kommt es auf die Basen $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ an! Auch die Reihenfolge der Basiselemente spielt eine Rolle, deswegen nimmt man für $\mathcal{B}$ bzw. $\mathcal{C}$ (geordnete) Tupel von Basiselementen, etwa $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$.

3.) L15.5: Die Matrixdarstellungen linearer Abb. stellen diese eindeutig dar: Die Abb. $\mathrm{Hom}(V,W) \to K^{m \times n}$, $f \mapsto {}_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{B}}$ ist für jede Basiswahl $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ ein Isomorphismus.

Wir behandeln in diesem Kapitel das Problem des Basiswechsels.
Dafür halten wir die folgenden Konventionen fest:

17.2. Ausgangslage: Seien V, W beides K-Vektorräume, gegeben sei eine lineare Abbildung $f: V \to W$ mit Basen $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ von W $(\dim W = m)$, und Basen $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ von V $(\dim V = n)$.
Können dann jeweils die Matrixdarstellungen ${}_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{B}}, {}_{\mathcal{C}'}[f]_{\mathcal{B}'} \in K^{m \times n}$ bilden. Problemstellung: Wie hängen die beiden Matrizen zusammen? Kann man die eine Matrixdarstellung in die andere umrechnen?

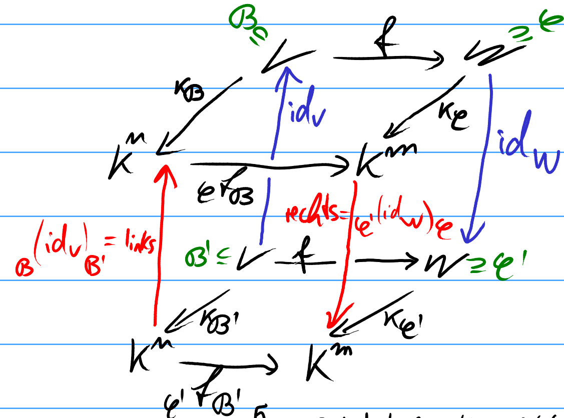
17.3. <u>Situation:</u>
Wir haben die Matrixdarstellungen ${}_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{B}}$, ${}_{\mathcal{C}'}[f]_{\mathcal{B}'}$ beschrieben mit den Diagrammen

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B}\subseteq V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "K_{\mathcal{B}}"'] \arrow[dr, phantom, "/\!/"] & W\supseteq\mathcal{C} \arrow[d, "K_{\mathcal{C}}"] \\ K^n \arrow[r, "{}_{\mathcal{C}}f_{\mathcal{B}}"'] & K^m \end{tikzcd} \quad \text{und} \quad \begin{tikzcd} \mathcal{B}'\subseteq V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "K_{\mathcal{B}'}"'] \arrow[dr, phantom, "/\!/"] & W\supseteq\mathcal{C}' \arrow[d, "K_{\mathcal{C}'}"] \\ K^n \arrow[r, "{}_{\mathcal{C}'}f_{\mathcal{B}'}"'] & K^m \end{tikzcd}$$

$\rightsquigarrow$ Matrix: ${}_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{B}}$
(Spalten sind Bilder von ${}_{\mathcal{C}}f_{\mathcal{B}}$ der Einheitsvektoren)

$\rightsquigarrow$ Matrix: ${}_{\mathcal{C}'}[f]_{\mathcal{B}'}$
(Spalten sind Bilder von ${}_{\mathcal{C}'}f_{\mathcal{B}'}$ der Einheitsvektoren)

Wir legen die Diagramme übereinander (das linke genau über das rechte) und wählen als Verbindungsabbildungen zwischen V, V und W, W die Identitätsabbildungen id_V, id_W:



$\rightsquigarrow$? Welche lin. Abb. ist hier?

Die rot dargestellten Abb.en $K^n \to K^n$ und $K^m \to K^m$ sind links ${}_{\mathcal{B}}(id_V)_{\mathcal{B}'}$ und rechts ${}_{\mathcal{C}'}(id_W)_{\mathcal{C}}$,
denn dort,
auf der linken und rechten "Seitenfläche" des Diagrammwürfels werden id_V und id_W bezüglich den verschiedenen Basen $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ und $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ dargestellt.

17.4. <u>Def.:</u> Die zugehörigen Matrizen ${}_{\mathcal{B}'}[id_V]_{\mathcal{B}}$ und ${}_{\mathcal{C}'}[id_W]_{\mathcal{C}}$ heißen <u>Basiswechselmatrizen.</u>

Bem.: ${}_{\mathcal{B}}[id_V]_{\mathcal{B}'} = {}_{\mathcal{B}'}[id_V]_{\mathcal{B}}^{-1}$ vgl. 17.7. 1.)

17.5. <u>Beobachtung:</u> Der Koordinatenvektor, der $v_j \in \mathcal{B}$ zu der Basis $\mathcal{B}'$ darstellt, ist die j-te Spalte von ${}_{\mathcal{B}'}[id_V]_{\mathcal{B}}$. $\ulcorner id(v_j) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_{ij} v_i' \rightsquigarrow {}_{\mathcal{B}'}[id_V]_{\mathcal{B}} = (\lambda_{ij})$, 14.21 $\lrcorner$

Der Basiswechsel ergibt sich nun durch den

17.6. <u>Basiswechselsatz:</u>
(Basiswechselformel)

$$\boxed{{}_{\mathcal{C}'}[f]_{\mathcal{B}'} = {}_{\mathcal{C}'}[id_W]_{\underbrace{\mathcal{C} \cdot {}_{\mathcal{C}}}_{\text{"}\mathcal{C}\text{ kürzt sich"}}}[f]_{\underbrace{\mathcal{B} \cdot {}_{\mathcal{B}}}_{\text{"}\mathcal{B}\text{ kürzt sich"}}}[id_V]_{\mathcal{B}'}}$$

<u>Bew.:</u> Beachten die "Vorderseite" des Diagrammwürfels, wo ${}_{\mathcal{E}'}A_{\mathcal{B}'} = {}_{\mathcal{E}'}(id_W)_{\mathcal{E}} \circ {}_{\mathcal{E}}f_{\mathcal{B}} \circ {}_{\mathcal{B}}(id_V)_{\mathcal{B}'}$.
Die Hintereinanderausführung dieser linearer Abb.en, die durch Matrizen ${}_{\mathcal{E}'}[id_W]_{\mathcal{E}}$ und ${}_{\mathcal{E}}[f]_{\mathcal{B}}$ und ${}_{\mathcal{B}}[id_V]_{\mathcal{B}'}$ gegeben sind, entspricht genau deren Matrixprodukt! (nach <u>15.7</u>)
Somit ist

$$\text{r.S.} = {}_{\mathcal{E}'}[\,id_W \circ f \circ id_V\,]_{\mathcal{B}'} = {}_{\mathcal{E}'}[\,f\,]_{\mathcal{B}'} = \text{l.S.} \qquad \square$$

17.7. <u>Spezialfälle:</u> 1.) Ist $f: V \to V$ <u>Endo</u>, und $S := {}_{\mathcal{B}}[id_V]_{\mathcal{B}'}$
die Basiswechselmatrix zu den Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$, so ist ${}_{\mathcal{B}'}[id_V]_{\mathcal{B}} = S^{-1}$
die inverse Matrix [in BWSatz $f = id_V$ einsetzen!].
Der BWSatz lautet dann ${}_{\mathcal{B}'}[f]_{\mathcal{B}'} = S^{-1} \cdot {}_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{B}} \cdot S$ [d.h. die Darstellmatrizen sind <u>ähnlich</u>, s. 17.8.2)]
Basiswechselmatrizen von Endos sind invertierbar.

2.) Ist $g: K^n \to K^m$, $g(x) = Ax$, so ist $A = {}_{\tilde{\mathcal{E}}}[g]_{\mathcal{E}}$ mit den Einheitsvektorenbasen $\tilde{\mathcal{E}}$ von K^m und $\mathcal{E}$ von K^n, da ${}_{\tilde{\mathcal{E}}}[g(x)] = {}_{\tilde{\mathcal{E}}}[g]_{\mathcal{E}} \cdot \overbrace{{}_{\mathcal{E}}[x]}^{=x}$.

3.) Ist $f: K^n \to K^n$ linear, so ist die Basiswechselmatrix $S := {}_{\mathcal{E}}[id]_{\mathcal{B}}$ zu einer Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ die daraus gebildete Matrix
$S = (v_1 | \dots | v_n)$ mit den v_i als Spalten, denn $v_i = id(v_i) = {}_{\mathcal{E}}[id]_{\mathcal{B}} \cdot \overbrace{{}_{\mathcal{B}}[v_i]}^{=e_i}$.
$\uparrow$ Einheitsvektorenbasis
Sei A die Matrix, die f beschreibt, also $f(x) = A \cdot x$ (bzgl. $\mathcal{E}\mathcal{E}$).
Der BWSatz lautet dann ${}_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{B}} = S^{-1} A S$.

17.8. <u>Def.:</u> 1.) Zwei Matrizen $A, B \in K^{m \times n}$ heißen <u>äquivalent</u>, wenn es invertierbare Matrizen $S \in K^{n \times n}$, $R \in K^{m \times m}$ gibt mit $B = R^{-1} A S$.
2.) Zwei Matrizen $A, B \in K^{n \times n}$ heißen <u>ähnlich</u>, wenn es eine invertierbare Matrix $S \in K^{n \times n}$ gibt mit $B = S^{-1} A S$.

17.9. <u>Kor.:</u> 1.) Die Matrixdarstellungen einer lin. Abb. $f: V \to W$ sind alles (zueinander) äquivalente Matrizen.
2.) Die Matrixdarstellungen eines Endos $f: V \to V$ sind alles ähnliche Matrizen.

<u>Bew.:</u> Klar mit 17.7.1) und 3.), und der Def. 17.8. Bemerken noch dass Äquivalenz von Matrizen transitiv ist: $B = R^{-1} A S$ und $C = U^{-1} B V$ zeigt $C = R^{-1} U^{-1} A S V$, also $C = (UR)^{-1} A (SV)$. Entsprechend ist die Ähnlichkeit von Matrizen transitiv. $\square$

<u>Folgerungen aus dem BWSatz zur Matrizentheorie:</u>

17.10. <u>Satz:</u> Durch elementare Zeilen- oder Spaltenumformungen geht eine Matrix $A \in K^{m\times n}$ in eine äquivalente Matrix über. (ohne Beweis)

<u>Denn:</u> A ist die Abb.matrix der lin. Abb. $f: K^n \to K^m,\ x \mapsto Ax$ bzgl. den Einheitsvektorenbasen. Es gilt (<u>ohne Beweis</u>, geht mit "Elementarmatrizen"):

Elementare Zeilenumformungen entsprechen Basiswechsel in K^m,

Elementare Spaltenumformungen entsprechen Basiswechsel in K^n.

17.11. <u>Satz:</u> Jede Matrix $A \in K^{m\times n}$ ist zur Matrix in der Form $\left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$ äquivalent ($r = rg(A)$), d.h. es gibt invertierbare Matrizen $S \in K^{n\times n}$, $R \in K^{m\times m}$ mit $R^{-1}AS = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$.

<u>Bew.:</u> Sei $g: K^n \to K^m,\ x \mapsto Ax$ die zu A gehörige lineare Abbildung, haben $A = {}_{\tilde{\mathcal{E}}}[g]_{\mathcal{E}}$, wo $\mathcal{E}$ die Einheitsvektorenbasis von K^n und $\tilde{\mathcal{E}}$ die von K^m ist, nach 17.7.2).

Nach 16.19 gibt es Basen $\mathcal{B} \subseteq K^n$, $\mathcal{C} \subseteq K^m$ mit ${}_{\mathcal{C}}[g]_{\mathcal{B}} = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$, $r = rg(A)$.

Nach dem BWSatz 17.6 ist ${}_{\mathcal{C}}[g]_{\mathcal{B}} = R^{-1}\, {}_{\tilde{\mathcal{E}}}[g]_{\mathcal{E}}\, S$ mit $R^{-1} = {}_{\mathcal{C}}[id_{K^m}]_{\tilde{\mathcal{E}}}$, $S = {}_{\mathcal{E}}[id_{K^n}]_{\mathcal{B}}$ □

17.12. <u>Bem.:</u> Nach Satz 17.10 kann diese Form durch Zeilen- <u>und</u> Spaltenumformungen erreicht werden. Dies verifiziert (nachträglich) das Gaußeliminationsverfahren zur Rangbestimmung in 16.25.

17.13. <u>Satz:</u> Zwei Matrizen $A, B \in K^{m\times n}$ sind äquivalent $\Leftrightarrow rg(A) = rg(B)$.

<u>Bew.:</u> Nach 17.11 ist A äqu. $\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$ mit $r = rg(A)$, B äqu. $\left(\begin{array}{c|c} I_s & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$ mit $s = rg(B)$.

Somit: A äqu. $B \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$ äqu. $\left(\begin{array}{c|c} I_s & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow r = s$, da Äquivalenz von Matrizen transitiv ist, vgl. Bew. von 17.9. □

17.14. <u>Bem.:</u> In Sätzen 17.11/17.13 ist mit "Rang" der Rang der zugeh. Matrixabbildung, also eigentlich der Spaltenrang gemeint. Beachtet man dies, erhalten wir einen neuen <u>Beweis von Zeilenrang = Spaltenrang (16.12)</u>: $\mathrm{Sprg}(A) \overset{17.11}{\underset{17.13}{=}} \mathrm{Sprg}(I_r) = \mathrm{Zlrg}(I_r)$

$$= \mathrm{Sprg}(I_r^T) \overset{17.13}{=} \mathrm{Sprg}((R^{-1}AS)^T) \overset{16.28}{=} \mathrm{Sprg}(S^T A^T (R^{-1})^T) \overset{17.13}{=} \mathrm{Sprg}(A^T) = \mathrm{Zlrg}(A). \quad \square$$

17.15 <u>Bsp. für Durchführung eines Basiswechsels</u>: Betr. das Bsp. 14.22:

$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, $f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} := \begin{pmatrix}x-y\\0\\x+y\end{pmatrix}$ hat bzgl. den Basen $\mathcal{B}=\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$ und $\mathcal{C}=\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$ die Darstellung $f_{\mathcal{C}\mathcal{B}}(x)=A\cdot x$ mit ${}_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{B}} = A = \begin{pmatrix}0&-2\\1&2\\0&0\end{pmatrix}$,

denn $f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = 0\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+0\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \rightsquigarrow K_{\mathcal{C}}(f(v_1))=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

und $f\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix} = (-2)\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+0\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \rightsquigarrow K_{\mathcal{C}}(f(v_2))=\begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix}$.

Jetzt Umrechnung auf die Basen $\mathcal{B}'=\left(\underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}_{v_1'},\underbrace{\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}}_{v_2'}\right)$ und $\mathcal{C}'=\left(\underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}_{w_1'},\underbrace{\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}}_{w_2'},\underbrace{\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}}_{w_3'}\right)$:

Basiswechselmatrizen ${}_{\mathcal{B}}[id_{\mathbb{R}^2}]_{\mathcal{B}'}$ und ${}_{\mathcal{C}'}[id_{\mathbb{R}^3}]_{\mathcal{C}}$ ausrechnen laut Beobachtung 17.5:

- $$\left.\begin{aligned} id_{\mathbb{R}^2}(v_1') &= \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = (-1)\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\\ id_{\mathbb{R}^2}(v_2') &= \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} = (-3)\cdot\underset{\uparrow\, v_1}{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}+2\cdot\underset{\uparrow\, v_2}{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}\end{aligned}\right\} \Rightarrow {}_{\mathcal{B}}[id_{\mathbb{R}^2}]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix}-1&-3\\1&2\end{pmatrix}$$

- $$\left.\begin{aligned} id_{\mathbb{R}^3}(w_1) &= \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = 0\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+(-1)\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}+0\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}\\ id_{\mathbb{R}^3}(w_2) &= \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+(-1)\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}+0\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}\\ id_{\mathbb{R}^3}(w_3) &= \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = -\tfrac12\cdot\underset{\uparrow\, w_1'}{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}+0\cdot\underset{\uparrow\, w_2'}{\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}}+\tfrac12\cdot\underset{\uparrow\, w_3'}{\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}}\end{aligned}\right\} \Rightarrow {}_{\mathcal{C}'}[id_{\mathbb{R}^3}]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix}0&1&-\frac12\\-1&-1&0\\0&0&\frac12\end{pmatrix}$$

Jetzt:

$${}_{\mathcal{C}'}[f]_{\mathcal{B}'} = {}_{\mathcal{C}'}[id_{\mathbb{R}^3}]_{\mathcal{C}}\cdot{}_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{B}}\cdot{}_{\mathcal{B}}[id_{\mathbb{R}^2}]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix}0&1&-\frac12\\-1&-1&0\\0&0&\frac12\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&-2\\1&2\\0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&-3\\1&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1\\1&3\\0&0\end{pmatrix}$$

Stimmt! Probe: $f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}+0\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$ ✓

und $f\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}+0\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$ ✓

17.16 <u>Bsp. für Spezialfall 17.7.3)</u>: Betr. $K^n=\mathbb{R}^3$, betr. Basis $\mathcal{B}=\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$:

Dann ist $S := {}_{\mathcal{E}}[id]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $S^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&-1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$ (mit Gaußelimination).

Sei $v\in\mathbb{R}^3$ beliebig. Welche Koordinaten hat v bezüglich $\mathcal{B}$? ${}_{\mathcal{B}}[v]$! Berechnen dies:

Wegen $v={}_{\mathcal{E}}[v]={}_{\mathcal{E}}[id]_{\mathcal{B}}\cdot{}_{\mathcal{B}}[v] \iff {}_{\mathcal{B}}[v]=S^{-1}\cdot v$ kann man mit S^{-1} die Koordinaten von $v\in\mathbb{R}^3$ umrechnen in die (im neuen Koordinatensystem) zur Basis $\mathcal{B}$. Bsp.: $v=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\Rightarrow$

$${}_{\mathcal{B}}[v] = \begin{pmatrix}0&1&0\\1&-1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-4\\3\end{pmatrix},$$ stimmt! Probe: $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}-4\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.