

Vorlesung Lineare Algebra I

WiSe'19/20 hhu
K. Halupczok

§4: Lineare Abbildungen und Matrizen

L16: Matrixform eines LGS

Stichworte: LGS in Matrixform, Zeilenrang = Spaltenrang, Zeilenstufenform, LGS-Lösungskriterien, Gaußeliminationsverfahren, inversetransponierte Matrix

Ein Lineares Gleichungssystem (LGS) wie in 10.6 definiert kann jetzt auch verstanden werden als eine Matrixgleichung der Form $A \cdot x = b$, bei der $A \in K^{m \times n}$, $b \in K^m (= K^{m \times 1})$ gegeben sind und $x \in K^n (= K^{n \times 1})$ gesucht ist.

Ausgeschrieben: $Ax = b \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \dots & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \dots & \dots & \alpha_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_{11}\xi_1 + \alpha_{12}\xi_2 + \dots + \alpha_{1n}\xi_n = \beta_1 \\ \alpha_{21}\xi_1 + \alpha_{22}\xi_2 + \dots + \alpha_{2n}\xi_n = \beta_2 \\ \vdots \\ \alpha_{m1}\xi_1 + \alpha_{m2}\xi_2 + \dots + \alpha_{mn}\xi_n = \beta_m \end{cases}$

16.1. Bem.: Im Vergleich zu 10.6 ist hier lediglich n und m vertauscht worden, was nicht wesentlich ist, vgl. dazu auch 14.13.

16.2. Def.: Die Matrix $(A|b)$, bei der man die r.s.b. als zusätzliche Spalte rechts an A anklebt, heißt erweiterte Matrix des LGS $Ax = b$.

Wir werden im folgenden Lösungskriterien für ein LGS erarbeiten. Offenbar gelingt das, wenn A invertierbar ist, d.h. A^{-1} ex., dann ist $Ax = b \stackrel{A^{-1}}{\Leftrightarrow} x = A^{-1} \cdot b$, also haben wir in diesem Fall die Lösungsmenge $\mathbb{L} := \{x \in K^n; Ax = b\} = \{A^{-1} \cdot b\}$.

Wir wollen anhand der Matrix A aber auch in anderen Fällen entscheiden können, ob ein LGS lösbar ist oder nicht (und wenn ja, wie).

Wir wissen ja auch noch nicht, wie A^{-1} berechnet werden könnte, falls existent.

16.3. Notation: Jede $m \times n$ -Matrix $A = (\alpha_{ij})$ kann man unmissverständlich mit ihren Spalten- bzw. ihren Zeilenvektoren beschreiben:

$A = (a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix}$ mit $a_j := \begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \alpha_{2j} \\ \vdots \\ \alpha_{mj} \end{pmatrix} \in K^{m \times 1}$
und $z_i := (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{in}) \in K^{1 \times n}$

Die a_1, \dots, a_n heißen die Spaltenvektoren, und z_1, \dots, z_m die Zeilenvektoren von A .

16.4. Bem.: Beide Typen von Vektoren vertauschen sich beim Übergang zum Transponierten:

$$A^T = (z_1^T, \dots, z_m^T) = \begin{pmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \vdots \\ a_m^T \end{pmatrix}, \text{ d.h. die Zeilenvektoren von } A^T \text{ sind die Transponierten der Spaltenvektoren von } A, \text{ usw.}$$

16.5. Def.: Jeder $m \times m$ -Matrix A kann man so die Teilmenge $\{a_1, \dots, a_m\} \subseteq K^{m \times 1} \cong K^m$ des VRs K^m zuordnen und ihre lineare Hülle darin betrachten. Man definiert Spaltenrang $(A) := \dim L(a_1, \dots, a_m)$.

16.6. Bem.: Wegen 14.14.2) ist dies auch der Rang der Matrixmultiplikationsabbildung $g: K^m \rightarrow K^m, x \mapsto A \cdot x$, denn $\text{im } g = L(a_1, \dots, a_m)$ (haben $a_i = g(e_i) \in \text{im } g$ nach 14.14.2), es folgt „ \supseteq “, da $\text{im } g$ UVR, „ \subseteq “: jede LK von (e_i) wird von g auf eine LK von $g(e_i) = a_i$ abgebildet.

16.7. Def.: Der Spaltenrang von A heißt Rang von A , Notation: $\text{rg}(A) := \text{Spaltenrang}(A)$.

16.8. Satz (Spaltenrang-Satz): Eine Matrix $A \in K^{m \times m}$ hat genau dann $\text{Spaltenrang}(A) = r$, wenn es unter den Spaltenvektoren von A

- (i) r linear unabh. Vektoren gibt, und
- (ii) je $r+1$ Vektoren linear abh. sind.

Ist dies der Fall und sind r linear unabh. Spaltenvektoren von A gegeben, so ist jeder Spaltenvektor von A eine LK dieser gegebenen Vektoren.

Bew.: Haben: (a_1, a_2, \dots, a_m) erzeugen $L(a_1, \dots, a_m)$. Nach Basisergänzungssatz gibt es unter den Spaltenvektoren eine Basis, nach Vor. der Länge r . Diese r Basisvektoren von $L(a_1, \dots, a_m)$ sind lin. unabh., und je $r+1$ ^{Spalten-}vektoren sind lin. abh. wegen 11.19. (3). \square

16.9. Bem.: Danach kann man den Spaltenrang als die maximale Zahl von lin. unabh. Spaltenvektoren bezeichnen. Analoges gilt für den Zeilenrang von A :

16.10. Def.: Zeilenrang $(A) := \dim L(z_1, \dots, z_m)$, analog gilt der Zeilenrang-Satz. (Ersetze in 16.8 überall "spalte" durch "zeile").

16.11. Bem.: Offenbar ist $\text{Zeilenrang}(A) = \text{Spaltenrang}(A^T)$,
 $\text{Spaltenrang}(A) = \text{Zeilenrang}(A^T)$.

Zunächst ist nicht zu sehen, dass Spalten- und Zeilenrang übereinstimmen sollte. Dies ist aber so, und diese Tatsache fundamental.

16.12. Satz: Für jede Matrix $A \in K^{m \times n}$ ist $\text{Zeilenrang}(A) = \text{Spaltenrang}(A) = \text{rg}(A)$.

Bew.: Sei $r := \text{Spaltenrang}(A)$, $s := \text{Zeilenrang}(A)$.

Bei Vertauschung der Spalten ändert sich r nicht wegen 16.5,

bei Vertauschung der Zeilen ändert sich s nicht wegen 16.9.

Nach dem Spalten- bzw. Zeilenrangssatz darf man daher \mathcal{E} annehmen:

(1) Jeder Spaltenvektor ist LK von a_1, \dots, a_r ,

(2) die Zeilenvektoren z_1, \dots, z_s sind linear unabh.

1. Beh.: Es gilt $s \leq r$.

↳ Spst sei $s > r$. Betr. das homogene LGS $\sum_{i=1}^s \alpha_{ik} \xi_i = 0$ für $k=1, \dots, r$.

Dieses hat r Gleichungen in den s Unbekannten ξ_1, \dots, ξ_s .

Nach Satz 10.16. gibt es $\xi_1, \dots, \xi_s \in K$, die nicht alle $= 0$ sind und das LGS lösen.

Nach (1) gibt es $\beta_{jk} \in K$ mit $a_j = \sum_{k=1}^r \beta_{jk} a_k$ für $j=1, \dots, n$.

Speziell gilt $\alpha_{ij} = \sum_{k=1}^r \beta_{ik} \alpha_{kj}$ für $j=1, \dots, r$, jedes $i=1, \dots, s$.

Mit dem LGS folgt nun für jedes $j \in \{1, \dots, r\}$:

$$\sum_{i=1}^s \xi_i \alpha_{ij} = \sum_{i=1}^s \xi_i \sum_{k=1}^r \beta_{ik} \alpha_{kj} = \sum_{k=1}^r \beta_{kj} \sum_{i=1}^s \xi_i \alpha_{ik} = 0,$$

so dass $\xi_1 (\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1r}) + \dots + \xi_s (\alpha_{s1}, \dots, \alpha_{sr}) = 0$,

also ist $\xi_1 z_1 + \dots + \xi_s z_s = 0$ im $\downarrow z_n(2)$.

2. Beh.: Es gilt $s = r$. Die 1. Beh. gilt für alle Matrizen über K ,

mit 16.10 folgt daher $r = \text{Spaltenrang}(A) = \text{Zeilenrang}(A^T)$

$\leq \text{Spaltenrang}(A^T) = \text{Zeilenrang}(A) = s$. \square

16.13. Kor.: (i) $\text{rg}(A^T) = \text{rg}(A)$, (ii) $\text{rg}(A) \leq \min\{m, n\}$

Bew.: (i): Klar mit 16.10 und 16.11, (ii): $\text{Spaltenrang}(A) \leq m$, $\text{Zeilenrang}(A) \leq n$. \square

Die Bestimmung des Rangs einer Matrix dient der Entscheidung, ob ein LGS lösbar ist oder nicht:

16.14. Lösungskriterium für LGS: $Ax = b$ lösbar $\Leftrightarrow \text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) \Leftrightarrow b \in L(a_1, \dots, a_n)$.

Bew.: Sei $g: K^n \rightarrow K^m$, $x \mapsto Ax$ die Mult. mit A . Dann: $Ax = b \Leftrightarrow b \in \text{im}(g) = L(a_1, \dots, a_m)$, vgl. 16.6,

$\Leftrightarrow L(a_1, \dots, a_m) = L(a_1, \dots, a_m, b) \Leftrightarrow \dim L(a_1, \dots, a_m) = \dim L(a_1, \dots, a_m, b) \Leftrightarrow \text{rg}(A) = \text{rg}(A|b)$. \square

Der Rang einer Matrix ist die Dimension des von den Spaltenvektoren (oder Zeilenvektoren!) der Matrix aufgespannten Unterraumes.

Mit dem Rang beschreiben wir nun die Struktur der Lösungsmenge eines beliebigen LGS.

16.15. Satz: Die Lösungsmenge eines LGS $Ax=b$ mit $A \in K^{m \times n}$, sofern lösbar, ist ein affiner Unterraum des K^n der Dimension $n - \text{rg}(A)$. D.h. $\exists a \in K^n$,

$\exists H$, ein UVR von K^n : $\mathbb{L} = a + H$, $\dim H = n - \text{rg}(A)$; H ist die Lösungsmenge von $Ax=0$.

Bew.: Die Menge $H = \{x \in K^n; Ax=0\}$ der Lösungen des homogenen Systems $Ax=0$ ist ein UVR des K^n , da $H = \ker(g)$ mit der Matrixmult. abb. $g: K^n \rightarrow K^m, x \mapsto Ax$.

Ist $a \in K^n$ eine Lösung von $Ax=b$, so ist $\mathbb{L} = a + H$. Sei $y = x - a$, dann ist $b = Ax = A(y+a) = Ay + Aa = Ay + b$. Also ist $Ax=b \Leftrightarrow Ay=0$.

Also ist \mathbb{L} affiner Unterraum der Dimension $\dim H = \dim \ker(g)$

$= n - \dim \text{im}(g) = n - \text{rg}(g)$ laut Rangatz 13.10. \square

16.16. Kor: Ein quadratisches LGS $Ax=b$ (d.h. mit $m=n$) ist eindeutig lösbar $\Leftrightarrow \text{rg}(A) = n$.

Bew.: Wegen 16.15 muss nur die Lösbarkeit gezeigt werden, falls $\text{rg}(A) = n$ ist.

Die Spaltenvektoren a_1, \dots, a_n sind dann lin. unabh. wegen $\text{im}(g) = L(a_1, \dots, a_n)$.

Mit $n = \dim K^n$ ist a_1, \dots, a_n also Basis des K^n , insb. erzeugen die Spaltenvektoren den K^n , also folgt $b \in K^n = L(a_1, \dots, a_n) = \text{im}(g)$, also ist

$Ax=b$ lösbar. \square

Wir geben daran eine Zusammenfassung zur Existenz einer inversen Matrix wie folgt:

16.17. Satz: Für eine quadratische Matrix $A \in K^{n \times n}$ sind äquivalent:

(1) A ist invertierbar, d.h. ex. eine Matrix $B \in K^{n \times n}$ mit $AB = BA = I_n$,

(2) Die Matrixmultiplikationsabb. $K^n \rightarrow K^n, x \mapsto Ax$, ist bijektiv,

(3) Die Matrixmultiplikationsabb. $K^n \rightarrow K^n, x \mapsto Ax$, ist surjektiv,

(4) Die Matrixmultiplikationsabb. $K^n \rightarrow K^n, x \mapsto Ax$, ist injektiv,

(5) Die Spalten von A bilden eine Basis des $K^{n \times 1}$,

(6) Die Zeilen von A bilden eine Basis des $K^{1 \times n}$,

(7) $\text{rg}(A) = n$, (8) ex. eine Matrix $B \in K^{n \times n}$ mit $A \cdot B = I_n$, (9) ex. eine Matrix $B \in K^{n \times n}$ mit $B \cdot A = I_n$, } dann ist $B = A^{-1}$

Bew.: • (2) \Rightarrow (1) aus Satz 15.9, (2) \Rightarrow (3) klar, (2) \Rightarrow (4) klar,
 (3) \wedge (4) \Rightarrow (2) klar, (3) $\Leftrightarrow \text{im}(A) = K^m \Leftrightarrow \text{ker}(A) = \{0\} \Leftrightarrow$ (4),
 also (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (3) \wedge (4) \Rightarrow (2), $\left[\text{rg}(A) + \dim \text{ker}(A) = m, \text{Rangsatz 13.10} \right]$
 d.h. (2), (3), (4) sind äquivalent.

• (1) \Rightarrow (8) klar, (1) \Rightarrow (9) klar,
 (8) \Leftrightarrow ex. Rechtsinverse $\stackrel{6.6}{\Leftrightarrow}$ (3), (9) \Leftrightarrow ex. Linksinverse $\stackrel{6.15}{\Leftrightarrow}$ (4),
 d.h. (1), (2), (3), (4), (8), (9) sind äquivalent.

• (7) \Leftrightarrow (5) aus Bew. von 16.16, (7) \Leftrightarrow (6) wegen Satz 16.12 (Zeilenrang = Spaltenrang),
 (7) $\Leftrightarrow \text{im}(A) = K^m \Leftrightarrow$ (3). □

16.18. Explizite Rangbestimmung: Wir haben in 10.10 bewiesen, dass sich die Lösungsmenge eines LGS bei elementaren Zeilenumformungen (A), (B), (C), (C') nicht ändert. Damit bleibt auch die Dimension des Lösungsraumes, also bleibt nach 16.15 auch $m - \text{rg}(A)$ erhalten. Fazit: Der Rang einer Matrix ändert sich nicht, wenn eine der elementaren Zeilenumformungen ausgeführt wird. Wegen Zeilenrang = Spaltenrang = Rang gilt dies aber ebenso für Spaltenumformungen! Dies liefert uns folgende Methode zur Rangbestimmung: Bringe eine Matrix durch elementare Zeilen- und Spaltenumformungen auf möglichst einfache Gestalt. Die maximale Anzahl lin. unabh. Zeilen (oder Spalten) ist der Rang und lässt sich leicht ablesen. Durch systematische Anwendung dieser Umformungen (s.u. 16.25) kommt man aber stets zur folgenden Matrixform, an der man den Rang sofort abliest.

16.19 Satz: Sei $A \in K^{m \times n}$ und g die zugeh. Matrixmult. abb. $g: K^m \rightarrow K^m, x \mapsto Ax$.
 Dann gibt es Basen $\mathcal{B} \subseteq K^m, \mathcal{C} \subseteq K^m$, so dass ${}_{\mathcal{C}}[g]_{\mathcal{B}} = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right]$ ist
 mit $r = \text{rg}(A)$.

Bew.: Für die fraglichen Basen $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_m)$ und $\mathcal{C} = (v_1, \dots, v_m)$ muss gelten, dass $g(u_j) = v_j, j = 1, \dots, r, g(u_j) = 0, j = r+1, \dots, m$. Im Rangsatz 13.10 hatten wir diese konstruiert: (u_1, \dots, u_m) so, dass (u_1, \dots, u_r) Basis von $\text{ker}(g)$ ist und $(g(u_{r+1}), \dots, g(u_m))$ Basis von $\text{im}(g)$. Die letztere wird noch zu einer Basis von K^m ergänzt. □

16.24. Gaußsches Eliminationsverfahren (Grundform unter ausschließlicher Verwendung von Zeilenumformungen):

1. Schritt: • Ist in der 1. Spalte von A mind. ein Eintrag $\neq 0$, kann durch ev. Vertauschen der Zeilen, d.h. Umformung (A), erreichen, dass $\alpha_{11} \neq 0$.

• Besteht die 1. Spalte nur aus Nullen, gehe zum 3. Schritt.

2. Schritt: Addiere das $(-\alpha_{i1})$ -fache der 1. Zeile zum α_{i1} -fachen der i -ten Zeile, $i=2, \dots, m$; beachte $\alpha_{11} \neq 0$ (Umformung (C')). Multipliziere die 1. Zeile mit $\frac{1}{\alpha_{11}}$ (Umformung (B), $\alpha_{11} \neq 0$). Danach hat die 1. Spalte die Form des 1. Einheitsvektors $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

3. Schritt: • Falls die 1. Spalte nur aus Nullen besteht, ersetze A durch die

$$\text{Restmatrix } \begin{bmatrix} \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{bmatrix} \in K^{m \times (m-1)}$$

• falls die 1. Spalte $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ist,

$$\text{ersetze } A \text{ durch die Restmatrix } \begin{bmatrix} \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{bmatrix} \in K^{(m-1) \times (m-1)}$$

4. Schritt: Gehe zurück zum 1. Schritt,

der dann mit der Restmatrix angewendet wird usw. Das Verfahren endet, wenn im 3. Schritt keine Restmatrix mehr gebildet werden kann, was nach spätestens n -maligem Anwenden der Fall ist, da jedesmal eine Spalte (und ev. eine Zeile) gestrichen wird. Setzen wir dann zuletzt alle im 3. Schritt gestrichlenen Zeilen und Spalten, die beim Weiterlaufen des Algorithmus unverändert geblieben sind, zusammen, ergibt sich eine Zeilenstufenform wie in Def. 16.21.

16.25. Bem.: 1.) Das Verfahren, auf eine erweiterte Matrix $(A|b)$ angewandt, liefert konkret die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems $AX=b$.

2.) Rangbestimmung: Vertauscht man in der Beschreibung 16.24 des Gauß-Algos "Zeilen" durch "Spalten" und umgekehrt, gelangt man zum Algorithmus für Spaltenumformungen. Wegen Zeilenrang = Spaltenrang dürfen zur Rangbestimmung auch solche Umformungen gemacht werden. Führt man 16.24 für Zeilen- und Spaltenumformungen durch, liegt die Endmatrix sowohl in Zeilenstufenform als auch in Spaltenstufenform vor, also genau so wie in 16.19, wo der Rang r direkt abgelesen werden kann als Anzahl der 1en in der Endmatrix. Beachten: Spaltenumformungen sind ansetzbar zur Rangbestimmung, aber nicht zur LGS-Lösung/Kernberechnung!

3) Invertierung von Matrizen: Geg. $A \in K^{n \times n}$, gesucht: $X \in K^{n \times n}$ mit $A \cdot X = I_n$.
Auch dafür kann das Gauß-Verfahren eingesetzt werden, denn zur Bestimmung von X sind die Spalten von X ermittelbar als Lösung der jeweiligen LGSe $A \cdot \begin{pmatrix} \xi_{1m} \\ \vdots \\ \xi_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $A \cdot \begin{pmatrix} \xi_{12} \\ \vdots \\ \xi_{n2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \dots, A \cdot \begin{pmatrix} \xi_{1m} \\ \vdots \\ \xi_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

Methode: Gaußsches Eliminationsverfahren (für Zeilen) mit erweiterter Matrix $(A|I_n)$.

Denn: behandeln so alle rechten Seiten $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_m = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ gleichzeitig!
Dieses wandelt $(A|I_n)$ um in $(I_n|A')$, falls A invertierbar ist:

a) Wird auf der l.S. die Einheitsmatrix erzeugt, ist A inv'bar, und auf der r.S. steht die inverse Matrix, d.h. $A^{-1} = A'$.

Für jede Spalte e_i von I_n wird $A \cdot x_i = e_i$ separat gelöst zu $x_i = A^{-1} \cdot e_i$, d.h. $X = A^{-1}$.

b) Lässt sich die l.S. nicht auf die Einheitsmatrix I_n bringen, ist A nicht invertierbar, hat also keine inverse Matrix. Klar!

Bsp.: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, ist A invertierbar? was ist A^{-1} ?
 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{I}]{\text{II} - \text{I}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{I}]{\text{III} + \text{II}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{I}]{\text{II} - \text{III}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \checkmark$

16.26. Merkregel zum Invertieren von Matrizen $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in K^{2 \times 2}$ mit $ad - bc \neq 0$:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Beweis: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & -ab+ba \\ cd-dc & -bc+da \end{pmatrix} = (ad-bc) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \square$

16.27. Rechenregeln zur Invertierung und Transponierung quadratischer Matrizen: $A, B \in K^{n \times n}$

(a) Sind A, B invertierbar, so auch AB , und es ist $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$. (Reihenfolge!)

(b) Ist A invertierbar, so auch A^T , und es ist $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Bew.: (a): $(B^{-1} \cdot A^{-1}) \cdot (AB) = B^{-1} (A^{-1}A) B = B^{-1} B = I_n$.

(b): $(A^{-1})^T \cdot A^T = (A \cdot A^{-1})^T = I_n^T = I_n$ wegen 16.28. \square

16.28. Bem.: Für $A \in K^{n \times m}$, $B \in K^{m \times k}$ gilt $(AB)^T = B^T \cdot A^T$. (Reihenfolge!)

Bew.: Für die zugeh. Matrixabb. $g: x \mapsto Ax$, $f: x \mapsto Bx$ gilt $(g \circ f)^T = f^T \circ g^T$ nach 15.14.

Dann 15.16 und 15.7. Man kann 16.28 aber auch direkt nachrechnen. \square