Vorlesung Lineare Algebra I

WiSe'19/'20 hhu
K. Halupczok

§4: Lineare Abbildungen und Matrizen

L15: Matrixdarstellungen und Hom(V,W)

Stichworte: Sylvester-Rangsatz, $\mathrm{Hom}(V,W) \cong K^{m\times n}$, $g\circ f(x)$ entspricht $(B\cdot A)\cdot x$. Assoziativität des Matrixprodukts, f^{-1} entspricht A^{-1}, Dualraum V^*, transponierte Abb. f^T

Wir behandeln jetzt VRe linearer Abbildungen und studieren Eigenschaften linearer Abbildungen mit ihren Matrixdarstellungen.
Schauen wir auf den K-VR $W^A := \{f : A\to W;\ f \text{ Abb.}\}$, wo $A\neq\emptyset$ bel. Menge und W ein K-VR. Interessant sind die Fälle, wo A ebenfalls ein K-VR ist und $f: A\to W$ linear:

15.1. **Satz**: Seien U, V, W K-VRe. Dann gilt:
(i) Sind $f: V\to W$, $g: W\to U$ linear, so auch $g\circ f : V\to U$.
(ii) Ist $f: V\to W$ ein Isomorphismus, so auch $f^{-1}: W\to V$.
(iii) Sind $f, g: V\to W$ linear, so auch $f+g$ und auch αf für alle $\alpha\in K$.

Bew.: (i), (iii): ✓, (ii): z.z. ist nur noch die Linearität von f^{-1}. Dazu seien $x, y\in W$ und $\alpha,\beta\in K$. Aus $f(f^{-1}(\alpha x+\beta y)) = \alpha x+\beta y = \alpha f(f^{-1}(x)) + \beta f(f^{-1}(y))$ $= f(\alpha f^{-1}(x) + \beta f^{-1}(y))$ folgt wegen der Injektivität von f, dass $f^{-1}(\alpha x+\beta y) = \alpha f^{-1}(x) + \beta f^{-1}(y)$. □

Die folgenden Rechenregeln für den Rang zusammengesetzter linearer Abbildungen sind bekannt als Sylvester-Rangsatz:

15.2. **Satz**: Seien V, W, U endlich-dim. K-VRe und $f: V\to W$, $g: W\to U$ lin. Abb.en, so gilt (i) $\mathrm{rg}(g\circ f) = \mathrm{rg}(g_{|f(V)}) = \mathrm{rg}(f) - \dim(\mathrm{im}(f)\cap\ker(g))$
und (ii) $\mathrm{rg}(f)+\mathrm{rg}(g) - \dim W \le \mathrm{rg}(g\circ f) \le \min(\mathrm{rg}(f), \mathrm{rg}(g))$.

Bew.: (i): Betrachte $\tilde g = g_{|\mathrm{im}(f)}$. Dann ist $\mathrm{im}(\tilde g) = \mathrm{im}(g\circ f)$, also auch $\mathrm{rg}(\tilde g) = \mathrm{rg}(g\circ f)$, und es gilt $\ker(\tilde g) = \mathrm{im}(f)\cap\ker(g)$.
Mit dem Rangsatz 13.10 folgt $\mathrm{rg}(\tilde g) = \dim\mathrm{im}(f) - \dim\ker(\tilde g) = \mathrm{rg}(f) - \dim\ker(\tilde g)$.
(ii): Zweites "$\le$": Nach (i) ist $\mathrm{rg}(g\circ f)\le \mathrm{rg}(f)$, und weiter gilt $\mathrm{rg}(g\circ f) = \mathrm{rg}(g_{|\mathrm{im}(f)})$ $= \dim g(f(V)) \le \dim g(W) = \mathrm{rg}(g)$. Erstes "$\le$": Andererseits gilt nach (i), dass $\mathrm{rg}(f) - \mathrm{rg}(g\circ f) = \dim(\mathrm{im}(f)\cap\ker(g)) \le \dim\ker(g) = \dim W - \mathrm{rg}(g)$ laut Rangsatz 13.10. □

15.3. **Bem.:** • Nach 15.1 ist die Isomorphie von K-VRen transitiv und symmetrisch (und reflexiv sowieso).

15.4. **Def.:** Wir setzen $\mathrm{Hom}(V,W) := \{f: V \to W;\ f \text{ linear}\}$.
• Nach 15.1(iii) ist diese Menge ein UVR des K-VRs W^V.
Wir bezeichnen $\mathrm{Hom}(V,W)$ als VR aller Homomorphismen von V nach W.
• Nach 15.1 (i), (iii) ist $\mathrm{Hom}(V,V)$ auch ein Ring mit Eins (mit "+", "∘", "1" = id).
Außerdem gilt darin: $\alpha(f \circ g) = (\alpha f) \circ g = f \circ (\alpha g)$ für alle $\alpha \in K$.
Eine solche Struktur heißt eine $\mathbb{K}$-Algebra (vgl. dies mit 14.10/14.11).
• Im Fall $V = W$ heißt $\mathrm{End}(V) := \mathrm{Hom}(V,V)$ die Endomorphismenalgebra auf V. Die Teilmenge $\mathrm{Aut}(V) := \{f: V \to V \text{ Isom.}\}$ von $\mathrm{End}(V)$ ist bezüglich der Komposition "∘" eine Gruppe, vgl. dazu 15.9 unten.

Wir können den K-VR $\mathrm{Hom}(V,W)$ mit dem K-VR der Matrizen $K^{m\times n}$ (isomorph) identifizieren, wo $m = \dim W$, $n = \dim V$ ist, wie folgt.

15.5. **Satz:** Es seien V, W K-VRe, $m = \dim W$, $n = \dim V$. Dann ist
$\mathrm{Hom}(V,W) \cong K^{m\times n}$ mit einem Isomorphismus
$$f \mapsto {}_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{B}} = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f), \quad \text{wenn } \mathcal{B}, \mathcal{C} \text{ Basen von } V, W \text{ sind.}$$

Bw.: • Sei $\mathcal{B} = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathcal{C} = (y_1, \dots, y_m)$.
Ist ${}_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{B}} = (\alpha_{ij})$, ${}_{\mathcal{C}}[g]_{\mathcal{B}} = (\beta_{ij})$, so gilt für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ und $j = 1, \dots, n$:
$$(\alpha f + \beta g)(x_j) = \alpha f(x_j) + \beta g(x_j)$$
$$= \alpha \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} y_i + \beta \sum_{i=1}^m \beta_{ij} y_i = \sum_{i=1}^m (\alpha \alpha_{ij} + \beta \beta_{ij}) y_i.$$
Also folgt ${}_{\mathcal{C}}[\alpha f + \beta g]_{\mathcal{B}} = \alpha\, {}_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{B}} + \beta\, {}_{\mathcal{C}}[g]_{\mathcal{B}}$ (nach 14.18),
somit ist die im Satz genannte Abb. linear.
• Weiter wird für jede Matrix $A = (\alpha_{ij}) \in K^{m\times n}$ durch die Setzung
$$f(x_j) := \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} y_i, \quad j = 1, \dots, n,$$
eine lineare Abb. f eindeutig festgelegt (Bem. 13.5), die ${}_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{B}} = A$ erfüllt.
Also ist die Abb. $f \mapsto {}_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{B}}$ bijektiv.
Dann ist klar, dass im Satz ein Isomorphismus angegeben ist. □

Für die Dimension von $\mathrm{Hom}(V,W)$ folgt:

15.6. <u>Satz</u>: Seien V, W endlich-dimensionale K-VRe. Dann ist auch der VR $\mathrm{Hom}(V,W)$ endlich-dimensional, und es gilt $\dim \mathrm{Hom}(V,W) = \dim V \cdot \dim W$.

<u>Bew.</u>: Wegen <u>15.5.</u> ist $\dim \mathrm{Hom}(V,W) = \dim K^{m \times n} = m \cdot n = \dim V \cdot \dim W$. $\square$

Wir zeigen nun in <u>15.7</u>:

Die Hintereinanderausführung $f \circ g$ zweier linearer Abb. $f: V \to W$, $g: W \to U$, entspricht in der Matrixdarstellung einfach dem Matrixprodukt der Matrizen zu f und g. Das geht nur, weil wir das Produkt zweier Matrizen so definiert haben wie in <u>14.5</u> und beantwortet die Frage in <u>14.6</u>.

Anstelle von "$\circ$" linearer Abb.en kann also einfacher das Matrixprodukt der zugehörigen Matrizen betrachtet werden. Dies stellt eine wichtige Technik zur Untersuchung der Verknüpfung linearer Abb.en dar.

15.7. <u>Satz</u>: Seien V, W, U K-VRe mit $\dim V = n$, $\dim W = m$, $\dim U = l$ und Basen $\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$. Weiter seien $f: V \to W$, $g: W \to U$ linear. Dann gilt:

$$ {}_{\mathcal{D}}[g \circ f]_{\mathcal{B}} = {}_{\mathcal{D}}[g]_{\mathcal{C}} \underset{\text{Matrixprodukt-Mal}}{\cdot} {}_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{B}}, $$

in anderer Notation: $M_{\mathcal{D}}^{\mathcal{B}}(g \circ f) = M_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}}(g) \cdot M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f)$.

Skizze:
$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g \circ f"] & W \arrow[r, "g"] & U \\
\mathcal{B} \arrow[u, phantom, "\cup"] & \mathcal{C} \arrow[u, phantom, "\cup"] & \mathcal{D} \arrow[u, phantom, "\cup"] \\
K^n \arrow[r, "\underbrace{{}_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{B}}}_{A}"'] \arrow[rr, bend right, "B \cdot A"'] & K^m \arrow[r, "\underbrace{{}_{\mathcal{D}}[g]_{\mathcal{C}}}_{B}"'] & K^l
\end{tikzcd}
$$

<u>Bew.</u>: Seien $\mathcal{B} = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathcal{C} = (y_1, \dots, y_m)$, $\mathcal{D} = (z_1, \dots, z_l)$ und ${}_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{B}} = (\alpha_{ij})$, ${}_{\mathcal{D}}[g]_{\mathcal{C}} = (\beta_{ij})$, ${}_{\mathcal{D}}[g \circ f]_{\mathcal{B}} = (\gamma_{ij})$.

Dann gilt

$$ g \circ f(x_j) = g(f(x_j)) = g\Big(\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} y_i\Big) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij}\, g(y_i) $$

$$ = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} \Big(\sum_{r=1}^{l} \beta_{ri} z_r\Big) = \sum_{r=1}^{l} \Big(\underbrace{\sum_{i=1}^{m} \overset{B}{\beta_{ri}}\, \overset{A}{\alpha_{ij}}}_{= \gamma_{rj} \; \to B \cdot A} \Big) z_r, $$

wobei die Matrix (γ_{rj}) genau durch die Matrixmultiplikation von (β_{ij}) mit (α_{ij}) entsteht, vgl. Def. <u>14.5</u>. $\square$

Damit können wir etwa (nachträglich) die Assoziativität des Matrizenprodukts verifizieren, vgl. 14.10(5), indem wir diese auf die Assoziativität von "$\circ$" zurückführen, die klar ist.

15.8. <u>Satz:</u> Seien $A \in K^{m\times n}$, $B \in K^{n\times r}$, $C \in K^{r\times s}$. Dann ist $A\cdot(B\cdot C) = (A\cdot B)\cdot C$ richtig.

<u>Bew.:</u> Betr. die linearen Abbildungen $h: K^n \to K^m$, $h(x) := Ax$, $g: K^m \to K^r$, $g(x) := Bx$, $f: K^r \to K^s$, $f(x) := Cx$.

Skizze: $K^n \xrightarrow[A]{h} K^m \xrightarrow[B]{g} K^r \xrightarrow[C]{f} K^s$

Es gilt $h\circ(g\circ f) = (h\circ g)\circ f$, also folgt mit <u>Satz 15.7</u>:

$$A\cdot(B\cdot C) = [h]\cdot([g]\cdot[f]) = [h]\cdot[g\circ f] = [h\circ(g\circ f)]$$
$$= [(h\circ g)\circ f] = [h\circ g]\cdot[f] = ([h]\cdot[g])\cdot[f]$$
$$= (A\cdot B)\cdot C. \qquad \square$$

Die Inverse f^{-1} eines Isom. f wird mit der zu A inversen Matrix A^{-1} dargestellt, wenn A die Matrixdarstellung von f ist, wie folgt.

15.9. <u>Def.:</u> B heißt eine <u>Inverse Matrix von</u> $A \in K^{n\times n}$, falls $B\cdot A = A\cdot B = I_n$, vgl. 7.11.

Notation: $A^{-1} := B$ (beachten, dass B eind. best. ist in $(K^{n\times n})^*$, vgl. 7.1, 7.10).

<u>Satz:</u> Seien V, W K-VRe, $f: V\to W$ ein Isom., $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ Basen von V, W. Für die inverse Abb. f^{-1} von f gilt ${}_{\mathcal{B}}[f^{-1}]_{\mathcal{C}} = {}_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{B}}^{-1}$, in anderer Notation: $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f^{-1}) = (M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f))^{-1}$.

<u>Bew.:</u> Ist f ein Isom., folgt nach 6.18, dass $f^{-1}\circ f = id_V$ und $f\circ f^{-1} = id_W$, also ${}_{\mathcal{B}}[f^{-1}]_{\mathcal{C}}\cdot{}_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{B}} = {}_{\mathcal{B}}[id_V]_{\mathcal{B}} = I_n$ und ${}_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{B}}\cdot{}_{\mathcal{B}}[f^{-1}]_{\mathcal{C}} = {}_{\mathcal{C}}[id_W]_{\mathcal{C}} = I_n$, wo $n = \dim V = \dim W$. Somit gilt ${}_{\mathcal{B}}[f^{-1}]_{\mathcal{C}} = {}_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{B}}^{-1}$ nach 7.10.(ii).

Ist ${}_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{B}}$ invertierbar, betr. die Abb. $g: W\to V$, die zu ${}_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{C}}^{-1}$ gehört, d.h. $g(x) := {}_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{C}}^{-1}\cdot x$ für alle $x\in W$ (ist linear!).

Dann folgt wieder $I_n = {}_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{B}}\cdot{}_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{C}}^{-1} = {}_{\mathcal{C}}[f\circ g]_{\mathcal{C}}$
und $I_n = {}_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{C}}^{-1}\cdot{}_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{B}} = {}_{\mathcal{B}}[g\circ f]_{\mathcal{B}}$,

somit ist $f\circ g = id_W$ und $g\circ f = id_V$, also $g = f^{-1}$ nach 6.19. $\square$

<u>Bem.:</u> Die Umkehrabb. einer bijektiven lin. Abb. ist insbesondere wieder linear.

Spezialfall Hom(V, K)

Der Fall $W=K$ in $\mathrm{Hom}(V,W)$ ist ein wichtiger Spezialfall.

15.10. **Def.:** Ist V ein K-VR, so schreibe $V^* := \mathrm{Hom}(V,K)$.
Anstelle $f \in V^*$ schreiben wir eher $x^* \in V^*$.
V^* heißt der Dualraum von V, und jedes Element $x^* \in V^*$ darin heißt Linearform oder lineares Funktional auf V.

15.11. **Bsp.:** 1.) Sei $A \neq \emptyset$ eine Menge, $x_0 \in A$, $V = K^A$.
Die durch $\ell : K^A \to K$, $f \mapsto \ell(f) := f(x_0)$ "f bei x_0 auswerten"
erklärte Abb. ist eine Linearform (und heißt Auswertungsfunktional).
2.) Die Abb. Spur: $K^{n\times n} \to K$, $(\alpha_{ij}) \mapsto \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii}$ ist eine Linearform.

15.12. **Bem.:** 1.) Ist $\dim V = n$, folgt $\dim V^* = n$, also $V \cong V^*$.
2.) Ist $\mathcal{B} = (x_1, \dots, x_n)$ Basis von V, so wird durch
$$x_j^*(x_k) := \delta_{jk} := \begin{cases} 1, & j=k \\ 0, & j \neq k \end{cases} \quad \text{für } j,k = 1,\dots,n$$
eine Basis $\mathcal{B}^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ von V^* festgelegt.
$\mathcal{B}^*$ heißt die zur Basis $\mathcal{B}$ duale Basis und ist eindeutig bestimmt.
(wegen der gemachten Vorgabe der Werte auf der Basis $\mathcal{B}$, vgl. Bem. 13.5.)
Der Basisvektor $x_j^* \in \mathcal{B}^*$ heißt j-tes Koordinatenfunktional bzgl. $\mathcal{B}$.
⌜Denn für alle $x \in V$, $x^* \in V^*$ gilt: $x = x_1^*(x)\cdot x_1 + \dots + x_n^*(x)\cdot x_n$ (1),
und $x^* = x^*(x_1)\cdot x_1^* + \dots + x^*(x_n)\cdot x_n^*$ (2).

zu (1): $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \Rightarrow x_j^*(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \underbrace{x_j^*(x_i)}_{=\delta_{ij}} = \lambda_j$ für jedes j,

zu (2): $x^* = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i^* \Rightarrow x^*(x_j) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \underbrace{x_i^*(x_j)}_{=\delta_{ij}} = \mu_j$ für jedes j. ⌟

3) Speziell für $V = K^n$ und die Standardbasis $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ erhalten wir e_j^* durch das n-Tupel $(e_j^*(e_1), \dots, e_j^*(e_n)) = e_j$, und ein beliebiges $x^* \in (K^n)^*$ [wegen $x^* = \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j^*$, $x^*(e_i) = \alpha_i$] erhalten wir durch $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.
Durch die Auffassung von n-Tupeln als Spaltenvektoren haben wir $x = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$. Es wird $(K^n)^*$ auf natürliche Art mit K^n identifiziert, und $\mathcal{B}^*$ mit $\mathcal{B}$.
Die "Wirkung" von x^* auf $y = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$ wird dann geg. durch
$$x^*(y) = \alpha_1\beta_1 + \dots + \alpha_n\beta_n.$$

4) Unendlichdimensionale VRe V sind i.a. nicht zu V^* isomorph, können aber stets injektiv nach V^{**}, dem sogenannten Bidualraum, linear abgebildet werden. (Ohne Bew.)

Zuletzt ordnen wir jeder linearen Abb. $f: V \to W$ eine lineare Abb. $f^T: W^* \to V^*$ zu.

15.13. Def.: Seien V, W K-VRe und $f: V \to W$ linear. Dann heißt die durch
$$f^T: W^* \to V^*, \quad y^* \mapsto y^* \circ f$$
erklärte lineare Abbildung f^T die transponierte Abbildung von f.
(Auch: die duale Abbildung von f.)

15.14. Satz: Es seien V, W, U K-VRe. Dann gilt:
(i) $(\mathrm{id}_V)^T = \mathrm{id}_{V^*}$,
(ii) $(f+g)^T = f^T + g^T$, $(\alpha f)^T = \alpha \cdot f^T$ für alle $f, g \in \mathrm{Hom}(V,W)$, $\alpha \in K$,
(iii) $(g \circ f)^T = f^T \circ g^T$ für alle $f \in \mathrm{Hom}(V,W)$, $g \in \mathrm{Hom}(W,U)$,
(iv) $f \in \mathrm{Hom}(V,W)$ ist genau dann ein Isomorphismus, wenn $f^T \in \mathrm{Hom}(W^*, V^*)$ ein Isomorphismus ist. In diesem Fall gilt $(f^{-1})^T = (f^T)^{-1}$.

Bew.: (i): $(\mathrm{id}_V)^T(x^*) = x^* \circ \mathrm{id}_V = x^*$ für alle $x^* \in V^*$.
(ii): $(f+g)^T(y^*) = y^* \circ (f+g) = y^* \circ f + y^* \circ g = f^T(y^*) + g^T(y^*) = (f^T + g^T)(y^*)$ für alle $y^* \in W^*$. Analog gilt $(\alpha f)^T(y^*) = y^* \circ (\alpha f) = \alpha(y^* \circ f) = \alpha(f^T(y^*))$ $= (\alpha f^T)(y^*)$ für alle $y^* \in W^*$.
(iii): Haben $g \circ f \in \mathrm{Hom}(V,U)$, $(g \circ f)^T \in \mathrm{Hom}(U^*, V^*)$. Dann gilt für alle $z^* \in U^*$:
$(g \circ f)^T(z^*) = z^* \circ (g \circ f)$ und $(f^T \circ g^T)(z^*) = f^T(g^T(z^*)) = g^T(z^*) \circ f = (z^* \circ g) \circ f = z^* \circ (g \circ f)$.

(iv): „$\Rightarrow$": Ist $f \in \mathrm{Hom}(V,W)$ bij., ex. f^{-1} mit $f^{-1}\circ f = id_V$, $f\circ f^{-1} = id_W$. Daraus folgt $f^T \circ (f^{-1})^T = (f^{-1}\circ f)^T = (id_V)^T = id_{V^*}$ und $(f^{-1})^T \circ f^T = (f\circ f^{-1})^T = (id_W)^T = id_{W^*}$.
Also ist auch f^T bij. und $(f^T)^{-1} = (f^{-1})^T$.

„$\Leftarrow$": Dies ergibt sich aus folgenden zwei Behauptungen:

1. Beh.: Ist $f^T \in \mathrm{Hom}(W^*, V^*)$ surj., so ist $f \in \mathrm{Hom}(V,W)$ inj.

⌜Sei $f(x) = 0$. Weil f^T surj., ex. zu jedem $x^* \in V^*$ ein $y^* \in W^*$ mit $f^T(y^*) = x^*$.
Es folgt $x^*(x) = f^T(y^*)(x) = y^*(f(x)) = 0$ für alle $x^* \in V^*$.
Dann ist $x = 0$, denn sonst ergänze x zu Basis $\mathcal{B}$ von V, definiere dann eine nichttriv. Linearform $x^* \in V^* \setminus \{0^*\}$ durch $x^*(x) = 1$, $x^*(x') = 0$ für alle $x' \in \mathcal{B} \setminus \{x\}$ ↯.⌟

2. Beh.: Ist $f^T \in \mathrm{Hom}(W^*, V^*)$ inj., so ist $f \in \mathrm{Hom}(W, V)$ surj.

⌜Sonst sei f nicht surj. Dann gilt $f(V) \neq W$. Ergänze eine Basis $\mathcal{C}$ von $f(V)$ zu einer Basis $\mathcal{C}'$ von W, wähle ein festes $y \in \mathcal{C}' \setminus \mathcal{C}$, definiere eine Linearform $y^* \in W^*$ durch $y^*(y) = 1$ und $y^*(y') = 0$ für $y' \in \mathcal{C}' \setminus \{y\}$.
Dann gilt $f^T(y^*)(x) = y^*(f(x)) = 0$ für alle $x \in V$, also $f^T(y^*) = 0^*$.
Da f^T inj. ist, folgt, dass $y^* = 0^*$ im ↯ zur Def. von y^*.⌟ □

15.15. Def.: Ist $A \in K^{m\times n}$ mit $A = (\alpha_{ij})_{i,j}$ geg., so heißt $A^T := (\alpha_{ji})_{i,j} \in K^{n\times m}$ die zu A **transponierte Matrix**.

Bsp.: $\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}1&4\\2&5\\3&6\end{pmatrix}$, $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)^T = \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_m\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_m\end{pmatrix}^T = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$.

Zur transponierten linearen Abb. gehört genau die transponierte Matrix:

15.16. Satz: Seien V, W K-VRe, $\dim V = n$, $\dim W = m$, mit Basen $\mathcal{B} = (x_1, \dots, x_n)$ von V und $\mathcal{C} = (y_1, \dots, y_m)$ von W. Weiter sei $f: V \to W$ lineare Abb. Sind $\mathcal{B}^*$ bzw. $\mathcal{C}^*$ die zu $\mathcal{B}$ bzw. $\mathcal{C}$ dualen Basen, so gilt

$$_{\mathcal{B}^*}[f^T]_{\mathcal{C}^*} = \left({}_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{B}}\right)^T$$

⌜bzw. $M^{\mathcal{C}^*}_{\mathcal{B}^*}(f^T) = \left(M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f)\right)^T$⌟.

Bew.: Ist $_{\mathcal{B}^*}[f^T]_{\mathcal{C}^*} = (\gamma_{kl})$, so gilt nach Def. der Abbildungsmatrix $f^T(y_l^*) = \sum_{j=1}^{n} \gamma_{jl} x_j^*$, also $f^T(y_l^*)(x_k) = \sum_{j=1}^{n} \gamma_{jl} \underbrace{x_j^*(x_k)}_{\delta_{jk}} = \gamma_{kl}$. Andererseits ist nach Def. $f^T(y_l^*) = y_l^* \circ f$, also gilt für deren Matrixdarstellung (α_{kl}), dass $(f^T(y_l^*))(x_k) = y_l^*(f(x_k)) = y_l^*\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ik} y_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ik} y_l^*(y_i) = \alpha_{lk}$, also $\gamma_{kl} = \alpha_{lk}$. □