Vorlesung Lineare Algebra I

WiSe'19/'20 hhu
K. Halupczok

§4: Lineare Abbildungen und Matrizen

L14: Matrizenrechnung

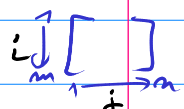
Stichworte: Matrizenrechnung, spezielle Matrizen, lineare Abbildungen und Matrizen, Koordinatenvektor und kanonischer Isomorphismus, darstellende Matrix

---

Matrizenrechnung:

14.1. **Def.:** • Eine $m\times n$-Matrix $A=(\alpha_{ij})$ über einem Körper $\mathbb{K}$ ist ein rechteckiges Zahlenschema* der Form
$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{bmatrix},$$

*eine Abb. $\alpha:\{1,\dots,m\}\times\{1,\dots,n\}\to\mathbb{K}$



wobei die $\alpha_{ij}\in\mathbb{K}$ für $i\in\{1,\dots,m\}, j\in\{1,\dots,n\}$. In (α_{ij}) heißt i der Zeilenindex und j der Spaltenindex. Man sagt, α_{ij} steht an Stelle (i,j).

• Menge der $m\times n$-Matrizen über $\mathbb{K}$: $\mathbb{K}^{m\times n} := \{(\alpha_{ij});\ \alpha_{ij}\in\mathbb{K}$ für alle $1\le i\le m$ und $1\le j\le n\}$.
"$\mathbb{K}$ hoch m Kreuz n"

Eine $m\times n$-Matrix besteht also aus m Zeilen und n Spalten von Zahlen. Genauso wie die Verknüpfungen $+,\cdot$ bei Vektoren komponentenweise erklärt sind, können wir solche Verknüpfungen auch komponentenweise bei Matrizen einführen:

14.2. **Def.:** Sind $A=(\alpha_{ij}),\ B:=(\beta_{ij})\in\mathbb{K}^{m\times n},\ \gamma\in\mathbb{K}$, wird durch
$$A+B := (\alpha_{ij}+\beta_{ij}) \hat{=} \begin{bmatrix} \alpha_{11}+\beta_{11} & \cdots & \alpha_{1n}+\beta_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1}+\beta_{m1} & \cdots & \alpha_{mn}+\beta_{mn} \end{bmatrix}$$
und
$$\gamma A := (\gamma\alpha_{ij}) = \begin{bmatrix} \gamma\alpha_{11} & \cdots & \gamma\alpha_{1n} \\ \vdots & & \\ \gamma\alpha_{m1} & \cdots & \gamma\alpha_{mn} \end{bmatrix}$$
eine Addition $+: \mathbb{K}^{m\times n}\times\mathbb{K}^{m\times n}\to\mathbb{K}^{m\times n}$
und eine Skalarmultiplikation $\cdot: \mathbb{K}\times\mathbb{K}^{m\times n}\to\mathbb{K}^{m\times n}$ erklärt.

14.3. **Satz:** $\mathbb{K}^{m\times n}$ ist mit den Verknüpfungen $+,\cdot$ aus 14.2 ein $\mathbb{K}$-VR der Dimension $m\cdot n$.

Bew.: Klar durch unmittelbares Überprüfen der VRaxiome in L9.3.
Die $m\cdot n$ vielen Matrizen $E_{k,l}$, $1\le k\le m$, $1\le l\le n$, wo an Stelle (k,l) eine 1 und sonst überall 0 steht, bilden offensichtlich eine Basis des $\mathbb{K}^{m\times n}$. □

14.4. **Def.:** Matrizen aus $\mathbb{K}^{n\times n}$ (d.h. Anz. Zeilen = Anz. Spalten) heißen <u>quadratische</u> Matrizen, die El. $\alpha_{11}, \alpha_{22}, \dots, \alpha_{nn}$ heißen dann <u>Diagonalelemente</u>.
Eine quadr. Matrix heißt <u>Diagonalmatrix</u>, falls alle Nicht-Diagonalelemente $= 0$ sind.

Wir erklären auch das Produkt zweier Matrizen, aber <u>nicht</u> komponentenweise:

14.5. **Def.:** Ist $A = (\alpha_{ik}) \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $B = (\beta_{kj}) \in \mathbb{K}^{n\times r}$, so definieren wir

$$AB = A\cdot B := (\gamma_{ij}) \in \mathbb{K}^{m\times r} \text{ mit } \gamma_{ij} := \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}\beta_{kj} \text{ für alle } 1\le i\le m,\ 1\le j\le r,$$

als das <u>Produkt</u> von A und B.

14.6. **Bem.:** • Es kommt wesentlich auf die Reihenfolge der Matrizen bei dieser Multiplikation an: So ist z.B.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 5+3\cdot 0 & 2\cdot(-1)+3\cdot 4 \\ 1\cdot 5+0\cdot 0 & 1\cdot(-1)+0\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 5 & -1 \end{pmatrix},$$

aber
$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cdot 2+(-1)\cdot 1 & 5\cdot 3+(-1)\cdot 0 \\ 0\cdot 2+4\cdot 1 & 0\cdot 3+4\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 15 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 5 & -1 \end{pmatrix},$$

also ist i.a. $A\cdot B \neq B\cdot A$.

• Warum definiert man das Matrizenprodukt so komisch?
Wir werden den Grund später in L15 sehen.

Zunächst einige Spezialfälle des $\mathbb{K}^{m\times n}$:

14.7. **Bem.:** 1.) $m = 1$. Dann ist $\mathbb{K}^{1\times n} = \{(\alpha_{11} \dots \alpha_{1n});\ \alpha_{1j} \in \mathbb{K} \text{ für alle } 1\le j\le n\}$,
d.h. die $1\times n$-Matrizen sind Zeilen(vektoren),
dies sind die n-Tupel des $\mathbb{K}^n$ als Zeilen geschrieben.

2.) $n = 1$. Dann ist
$$\mathbb{K}^{m\times 1} = \left\{\begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \vdots \\ \alpha_{m1} \end{bmatrix};\ \alpha_{i1} \in \mathbb{K} \text{ für alle } 1\le i\le m\right\},$$

d.h. die $m\times 1$-Matrizen sind (Spalten)vektoren,
dies sind die m-Tupel des $\mathbb{K}^m$ vertikal, d.h. als Spalten geschrieben.

3.) Wir haben offenbar $\mathbb{K}^m \cong \mathbb{K}^{m\times 1}$ und $\mathbb{K}^n \cong \mathbb{K}^{1\times n}$ als Isomorphie von $\mathbb{K}$-Vektorräumen. Aussagen über Matrizen des $\mathbb{K}^{m\times n}$ gelten i.a. <u>auch</u> für Spalten- oder Zeilenvektoren (Fall $n=1$ oder $m=1$).

4.) Für $a = (\alpha_1\ \alpha_2 \dots \alpha_m) \in \mathbb{K}^{1\times m}$ und $b = \begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_m\end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{m\times 1}$

ergibt $a\cdot b = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \dots + \alpha_m\beta_m$ ein Körperel. $\in \mathbb{K}$ (im Prinzip eine 1×1-Matrix), "Zeile · Spalte = Skalar"

und $b\cdot a = (\alpha_i \beta_j) = \begin{bmatrix}\alpha_1\beta_1 & \alpha_1\beta_2 & \cdots & \alpha_1\beta_m\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \alpha_m\beta_1 & \alpha_m\beta_2 & \cdots & \alpha_m\beta_m\end{bmatrix}$ ergibt eine quadratische Matrix $\in \mathbb{K}^{m\times m}$.

"Spalte · Zeile = Matrix"

5.) Haben γ_{ij} = (i-te Zeile von A)·(j-te Spalte von B) in Def. 14.5.

14.8. Spezielle Matrizen: Einheitsmatrix: $I_m = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & & & 1\end{pmatrix} = (\delta_{ij}) \in \mathbb{K}^{m\times m}$, wo $\delta_{ij} := \begin{cases}1, & i=j\\ 0, & \text{sonst}\end{cases}$

hat 1-en in der "Diagonalen", wo i=j

Nullmatrix: $O = \begin{pmatrix}0 & \cdots & 0\\ \vdots & & \vdots\\ 0 & \cdots & 0\end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{m\times n}$

14.9. Def.: Eine $n\times n$-Matrix der Form $\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n}\\ 0 & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_{nn}\end{pmatrix} = (\alpha_{ij}) \in \mathbb{K}^{n\times n}$, wo $\alpha_{ij} = 0$ für alle $i > j$

alle Einträge unterhalb der Diagonalen sind = 0

heißt obere Dreiecksmatrix.

Bem.: • Diagonalmatrizen sind obere Dreiecksmatrizen, aber offenbar nicht umgekehrt.
• Im $\mathbb{K}^{n\times n}$ ist I_n das neutr. El. bzgl. der Matrixmult., O das neutr. El. bzgl. +:

14.10. Rechenregeln für Matrizen:

(1) $A + O = O + A = A$ für alle $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, (2) $A\cdot I_m = I_m \cdot A = A$ für alle $A \in \mathbb{K}^{m\times m}$,

(3) $A(B+C) = AB + AC$ für $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $B, C \in \mathbb{K}^{n\times r}$,

(4) $(A+B)C = AC + BC$ für $A, B \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $C \in \mathbb{K}^{n\times r}$,

(5) $(AB)C = A(BC)$ für $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{K}^{n\times r}$, $C \in \mathbb{K}^{r\times s}$.

(6) $(\gamma A)B = \gamma(AB) = A\cdot(\gamma B)$ für $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{K}^{n\times r}$, $\gamma \in \mathbb{K}$.

Bew.: durch komponentenweises Nachrechnen leicht möglich. Für (5) ist dies recht aufwendig, eleganter geht dies später in L15. □

14.11. Bem.: $\mathbb{K}^{n\times n}$ ist mit der Matrixmultiplikation "·" und "+" ein (für n≥2 nichtkommutativer) Ring mit Eins ($= I_n$). Gleichzeitig besitzt er als $\mathbb{K}$-VR eine Skalarmultiplikation, die wegen (6) auch verträglich mit "·" ist. Man nennt so eine Struktur eine $\mathbb{K}$-Algebra.

14.12. Bsp.: $\left(\begin{pmatrix}1 & 2 & 5\\ 4 & -1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -3\\ 2 & -6\\ -1 & 3\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 3 & -1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\cdot1+2\cdot2+5\cdot(-1) & 1\cdot(-3)+2\cdot(-6)+5\cdot3\\ 4\cdot1+(-1)\cdot2+2\cdot(-1) & 4\cdot(-3)+(-1)\cdot(-6)+2\cdot3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 3 & -1 & 1\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 3 & -1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, weiter ist dies $= \begin{pmatrix}1 & 2 & 5\\ 4 & -1 & 2\end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix}1 & -3\\ 2 & -6\\ -1 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 3 & -1 & 1\end{pmatrix}\right)$, was man ebenso einfach nachrechnen kann.

14.13. Matrix mal Spalte: • Ist $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ eine $m\times n$-Matrix und $x \in \mathbb{K}^n = \mathbb{K}^{n\times 1}$ eine Spalte bzw. ein Vektor des $\mathbb{K}^n$, etwa $A = (\alpha_{ij})$ und $x = \begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots \\ \xi_n\end{pmatrix}$, dann ist

$$A\cdot x = \begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_{11}\xi_1 + \alpha_{12}\xi_2 + \ldots + \alpha_{1n}\xi_n\\ \vdots \\ \alpha_{m1}\xi_1 + \alpha_{m2}\xi_2 + \ldots + \alpha_{mn}\xi_n\end{pmatrix} \in \mathbb{K}^m.$$

Die Komponenten des Ergebnisvektors $A\cdot x \in \mathbb{K}^m$ sind dabei offenbar die linken Seiten eines linearen Gleichungssystems mit Unbekannten $\xi_1, \ldots, \xi_n$ und Koeffizienten α_{ij}, den Einträgen von A. Wir können ein LGS deswegen in Matrizenform als $A\cdot x = b$ aufschreiben, vgl. dazu L16.

• Wird eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ mit einem kanonischen Einheitsvektor $e_r \in \mathbb{K}^n$ multipliziert, ergibt sich als Ergebnisvektor genau die r-te Spalte von A, in Formeln: $A\cdot e_r = (\alpha_{ir})_{i\in\{1,\ldots,m\}}$ für alle $r \in \{1,\ldots,n\}$.
(In e_r ist $\xi_r = 1$, alle anderen ξ_j $(j \neq r)$ sind $= 0$.)

Zusammenhang zwischen Linearen Abbildungen und Matrizen:

14.14. Satz: 1.) Jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ liefert als (Matrix)multiplikation mit (Spalten)vektoren $x \in \mathbb{K}^n$ eine lineare Abbildung $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $x \mapsto A\cdot x$.

2.) Umgekehrt wird jede lineare Abb. $g: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ durch eine Matrix-multiplikation beschrieben, d.h. ex. $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$: $g(x) = A\cdot x$, nämlich:
Die Spalten dieser Matrix sind die Bilder $g(e_i)$ der Einheitsvektoren.
In Formeln: $A := (g(e_1) \,|\, g(e_2) \,|\, \ldots \,|\, g(e_n))$,
genauer mit den Komponenten ausgedrückt: $A = (\alpha_{ij})$ mit $\alpha_{ij} = i$-te Komponente von $g(e_j)$,
oder einfach $A\cdot e_j = g(e_j)$ für alle $j \in \{1,\ldots,n\}$.

Bew.: 1.): Zu A def. $g: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $x \mapsto A\cdot x$. Dann ist g linear wegen 14.10.(3),(6).
2.): Durch g und $x \mapsto A\cdot x$ sind lineare Abb. gegeben. Um zu zeigen, dass diese gleich sind, genügt der Vergleich auf den e_j, $j \in \{1,\ldots,n\}$, wegen Satz L13.5.
Nun ist $g(e_j) = A\cdot e_j$, da beim Multiplizieren einer Matrix A mit e_j gerade die j-te Spalte von A herauskommt, vgl. 14.13. □

Bem.: Matrizen können demnach mit linearen Abbildungen $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ identifiziert werden, s. L15.

14.15 <u>Idee</u>: Wegen L13.5 gilt: Zu V mit $\dim_{\mathbb{K}} V = n$ existiert zu jeder Basis $\mathcal{B}=(v_1,\dots,v_n)$ in V eindeutig ein Isomorphismus $K_{\mathcal{B}}: V \to \mathbb{K}^n$, mit $K_{\mathcal{B}}(v_j) = e_j$ (der j-te Einheitsvektor).

Also gilt: $K_{\mathcal{B}}\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j\right) = \begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots \\ \lambda_n\end{pmatrix}$, denn $K_{\mathcal{B}}\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \underbrace{K_{\mathcal{B}}(v_j)}_{=e_j} = \lambda_1 \begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots \\0\end{pmatrix} + \dots + \lambda_n \begin{pmatrix}0\\ \vdots \\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots \\ \lambda_n\end{pmatrix}$,

die j-te Komponente dieses Vektors, nämlich λ_j, ist die "Koordinate" von $v = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j$ in "Richtung" v_j.

14.16 <u>Def.</u>: Sei ein $\mathbb{K}$-VR V mit Basis $\mathcal{B}=(v_1,\dots,v_n)$ gegeben.
Der eindeutig bestimmte Isomorphismus $V \to \mathbb{K}^n$, der v_j auf e_j abbildet, sei mit $K_{\mathcal{B}}$ bezeichnet und heißt <u>Koordinatenabbildung</u> bezüglich $\mathcal{B}$, oder auch der <u>kanonische Isomorphismus</u> bezüglich $\mathcal{B}$.
Der Vektor $K_{\mathcal{B}}(v) \in \mathbb{K}^n$ heißt <u>Koordinatenvektor</u> von v bzgl. der Basis $\mathcal{B}$.
Andere Notation: ${}_{\mathcal{B}}[v]$. Somit: ${}_{\mathcal{B}}[v_j] = e_j$ und ${}_{\mathcal{B}}\left[\sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j\right] = \begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots \\ \lambda_n\end{pmatrix}$.
(auch möglich: $\varphi_{\mathcal{B}}(v)$)

14.17 <u>Neue Idee</u>: Wir wollen <u>beliebige</u> lineare Abbildungen $f: V \to W$ zwischen <u>irgendwelchen</u> $\mathbb{K}$-VR V und W durch eine Matrix(multiplikation) beschreiben!
Wir wählen eine Basis $\mathcal{B}=(v_1,\dots,v_n)$ in V, eine Basis $\mathcal{C}=(w_1,\dots,w_m)$ in W und betrachten die jeweiligen Koordinatenabbildungen $K_{\mathcal{B}}$ bzw. $K_{\mathcal{C}}$ nach $\mathbb{K}^n$ bzw. $\mathbb{K}^m$.

14.18 <u>Def.</u>: Die Koordinaten der Bildvektoren $f(v_j)$ bzgl. $\mathcal{C}$ (laut 14.17) erklären eine neue Abbildung ${}_{\mathcal{C}}f_{\mathcal{B}}: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, die def. ist durch die Angabe

$$\boxed{{}_{\mathcal{C}}f_{\mathcal{B}}(e_j) := K_{\mathcal{C}}(f(v_j))} \quad (j \in \{1,\dots,n\})$$

Skizze:
Kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd} \overset{\mathcal{B}}{V} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "K_{\mathcal{B}}"'] & \overset{\mathcal{C}}{W} \arrow[d, "K_{\mathcal{C}}"] \\ \mathbb{K}^n \arrow[r, "{}_{\mathcal{C}}f_{\mathcal{B}}"'] & \mathbb{K}^m \end{tikzcd}$$

Durch Angabe der Bilder auf den Basisvektoren e_j ist ${}_{\mathcal{C}}f_{\mathcal{B}}$ erklärt nach L13.5.

14.19 <u>Bem.</u>: Wenn ${}_{\mathcal{C}}f_{\mathcal{B}}$ die e_j auf die $K_{\mathcal{C}}(f(v_j))$ abbildet, so "stellt ${}_{\mathcal{C}}f_{\mathcal{B}}$ die Abb. f dar als Abb. von $\mathbb{K}^n$ in $\mathbb{K}^m$".
Denn laut Konstruktion gilt $v_j \overset{f}{\longmapsto} f(v_j) \overset{K_{\mathcal{C}}}{\longmapsto} K_{\mathcal{C}}(f(v_j))$ und $v_j \overset{K_{\mathcal{B}}}{\longmapsto} K_{\mathcal{B}}(v_j) \overset{{}_{\mathcal{C}}f_{\mathcal{B}}}{\longmapsto} K_{\mathcal{C}}(f(v_j))$,
denn ${}_{\mathcal{C}}f_{\mathcal{B}}(K_{\mathcal{B}}(v_j)) = {}_{\mathcal{C}}f_{\mathcal{B}}(e_j) \overset{\text{Def.}}{=} K_{\mathcal{C}}(f(v_j))$.
Die Abb. ${}_{\mathcal{C}}f_{\mathcal{B}}$ macht dasselbe wie f, nur in Koordinaten bzgl. $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ ausgedrückt.

14.20. **Def.:** Aufgrund des Satzes 14.14. 2.) gehört zu ${}_{\mathcal{C}}f_{\mathcal{B}}$ auch eine beschreibende Matrix, die wir als ${}_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{B}}$ notieren, d.h. ${}_{\mathcal{C}}f_{\mathcal{B}}(x) = {}_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{B}} \cdot x$ für alle $x \in \mathbb{K}^n$.
Auch andere Notationen sind dafür möglich, z.B. ist auch $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f)$ gebräuchlich.
Sie heißt Matrix(darstellung) von f bezüglich $\mathcal{B}, \mathcal{C}$.

14.21. **Bem.:** Die j-te Spalte dieser Matrix ist gerade der Vektor $K_{\mathcal{C}}(f(v_j)) \in \mathbb{K}^m$ [14.18].
Für $\mathcal{B} = (v_j)$, $\mathcal{C} = (w_i)$ ist also $f(v_j) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} w_i$, $j = 1, \dots, n$ ← j ist die Spaltennummer der Matrix
mit ${}_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{B}} = (\alpha_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$

14.22. **Bsp.:** $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x-y \\ 0 \\ x+y \end{pmatrix}$ hat bzgl. den Basen $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ und
$\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ die Darstellung ${}_{\mathcal{C}}f_{\mathcal{B}}(x) = A \cdot x$ mit $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$

denn $f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow K_{\mathcal{C}}(f(v_1)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

und $f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = (-2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow K_{\mathcal{C}}(f(v_2)) = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Schreiben: ${}_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

14.23. **Satz:** In der Situation von 14.17/14.18./14.20 haben wir: Es gilt für alle $v \in V$ die Formel ${}_{\mathcal{C}}[f(v)] = {}_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{B}} \cdot {}_{\mathcal{B}}[v]$.

14.24. **Bem.:** Die Koordinaten von $f(v)$ erhält man demnach als Produkt der darstellenden Matrix mit dem Koordinatenvektor von v.

Bew.: überprüfe auf v_j: l.S. $= K_{\mathcal{C}}(f(v_j)) = {}_{\mathcal{C}}f_{\mathcal{B}}(e_j) = {}_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{B}} \cdot e_j = {}_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{B}} \cdot {}_{\mathcal{B}}[v_j] =$ r.S. ✓
Für bel. $v = \sum \lambda_j v_j$ folgt die Formel wegen Linearität. □

14.25. **Bem.:** Für andere Basen kommen i.a. auch andere Matrizen heraus!
Genau: Sind $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ Basen von V und $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ Basen von W, ist
i.a. ${}_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{B}} \neq {}_{\mathcal{C}'}[f]_{\mathcal{B}'}$.
Das gilt selbst dann, wenn sich $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ (oder $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$) nur durch die Reihenfolge der darin aufgeführten Basisvektoren unterscheiden.
Deswegen ist wichtig, dass wir Basen durch Tupel/Familien angeben, welche die Reihenfolge der Einträge respektieren.