Vorlesung Lineare Algebra I

WiSe'19/'20 hhu
K. Halupczok

§4: Lineare Abbildungen und Matrizen

L13: Definition und Eigenschaften linearer Abbildungen

Stichworte: Lineare Abbildung, Isomorphie, Basen und lin. Abb.en, Kern, Bild, f inj. $\Leftrightarrow$ $\ker f = \{0\}$, Rangsatz, Homomorphiesatz, jeder n-dim. K-VR ist isomorph zu K^n

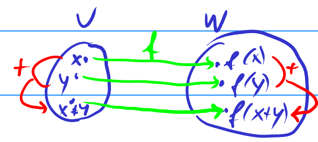
---

Wir studieren ab jetzt Abbildungen zwischen Vektorräumen. Wir nennen sie "linear", wenn sie die Struktur der VRe (d.h. $+, \alpha\cdot$) respektieren:

13.1. **Def.:** Lineare Abbildungen: Seien V und W VRe über einem Körper K. Eine Abb. $f: V \to W$ heißt linear (bzw. (VR-) Homomorphismus), falls gilt:

$(\ell 1)$ $\forall x, y \in V: f(x+y) = f(x) + f(y)$,

$(\ell 2)$ $\forall x \in V\ \forall \alpha \in K: f(\alpha x) = \alpha f(x)$.



13.2. **Bem.:**
- Für eine lineare Abb. gilt stets $f(\underset{\text{0 in } V}{0}) = \underset{\text{0 in } W}{0}$ (da $f(0) + f(x) = f(0+x) = f(x)$).
- Für eine lin. Abb. gilt stets $\forall x, y \in V\ \forall \alpha, \beta \in K: f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$.
- Für eine lin. Abb. gilt stets $\forall x_1, \dots, x_n \in V\ \forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K: f(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i)$.
- Soll der gemeinsame Körper K von V, W genannt werden, sagt man "K-linear".
- Einschränkungen linearer Abb.en auf UVRe sind wieder lineare Abb.en. Genau heißt das: $f: V \to W$ linear, $U \subseteq V$ ein UVR $\Rightarrow$ $f|_U: U \to W$ linear. ⌜$(\ell 1), (\ell 2)$ klar, da $x+y, \alpha x \in U$⌟
- Bsp.: Polynomfunktionen $K \to K$, $x \mapsto P(x)$ mit linearem Polynom P, $0 \mapsto 0$, sind lin. Abb.en.

Wichtig ist die Frage, ob lineare Abb.en injektiv/surjektiv/bijektiv sind. Deswegen haben solche Abb.en besondere Namen:

13.3. **Def.:** Ein injektiver Homomorphismus heißt Monomorphismus,
" surjektiver " " Epimorphismus,
" bijektiver " " Isomorphismus.

(Im letzten Fall heißen V und W isomorph, d.h. falls $\exists f: V \to W$, f Isom.)

In Zeichen: $V \cong W$, sprich "V isomorph zu W". (Ü): $f^{-1}: W \to V$ auch Isom.

" Homomorphismus $f: V \to V$ heißt Endomorphismus (von V),
" bijektiver Endomorphismus heißt Automorphismus (von V).

L13

-2-

13.4. **Bsp.:** $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y,z) = (x-y, x+y)$ ist linear ⌈nachrechnen⌋,
$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x-y, 1+x)$ ist nicht linear ⌈$f(0) \neq 0$⌋
$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \bar{z}$ ist $\mathbb{R}$-linear, aber nicht $\mathbb{C}$-linear
⌈denn $f(i \cdot 1) = \overline{i \cdot 1} = \bar{i} = -i$, aber $i \cdot f(1) = i \cdot \bar{1} = i \neq f(i \cdot 1)$.⌋
$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$, $f(x,y) = x + iy$ ist ein Isom. von $\mathbb{R}$-VRen. Also: $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$.
Wollen aber unserer Spaltenkonvention folgen, also z.B. lieber $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x-y \\ x+y \end{pmatrix}$ schreiben!

13.5. **Bem.:** Lineare Abbildungen $f: V \to W$ sind durch die Angabe der Bilder $f(v_i)$ auf einer Basis $(v_i)_{i \in I}$ von V eindeutig definiert!
Denn ist $v \in V$ beliebig, etwa $v = \sum_{i \in I} \lambda_i v_i$ (höchstens endl. viele $\lambda_i \neq 0$), muss gelten:
$$f(v) = f\left(\sum \lambda_i v_i\right) = \sum \lambda_i f(v_i).$$
Eine andere Wahl gibt es nicht, da die λ_i mit v eindeutig bestimmt sind nach Satz 11.19 (4).

13.6. **Bsp.:** $V = \mathbb{R}^2$, $W = \mathbb{R}^3$: haben die Basis $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ von $\mathbb{R}^2$. Setze $f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, und $f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Diese Daten genügen, um eine lineare Abb. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ zu erklären. Denn jedes $v \in \mathbb{R}^2$ ist von der Form $v = \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, z.B. $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$,
haben dann $f(v) = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, z.B. $f\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Weiter sind Urbild von $\{0\} \subseteq W$ und das Bild von f von Interesse:

13.7. **Def.:** Kern und Bild einer linearen Abb. $f: V \to W$
sind $\ker f := \{x \in V \mid f(x) = 0\} = f^{-1}(\{0\})$ "Kern von f"
und $\operatorname{im} f := f(V) = \{y \in W \mid \exists x \in V: f(x) = y\}$ "Bild von f".

13.8. **Satz:** Sei $f: V \to W$ eine lineare Abb. Dann gilt:
$\ker f$ ist UVR von V, und $\operatorname{im} f$ ein UVR von W.

Bew.: Dies folgt aus der Linearität von f und der Abgeschlossenheit bzgl. $+, \alpha\cdot$ (und $0 \in \ker f$), im einzelnen: • $x, y \in \ker f \Rightarrow f(x+y) = f(x) + f(y) = 0 + 0 = 0 \Rightarrow x + y \in \ker f$, $f(\alpha \cdot x) = \alpha f(x) = \alpha \cdot 0 = 0 \Rightarrow \alpha \cdot x \in \ker f$, $0 \in \ker f$ ✓ • $u, w \in f(V) \Rightarrow u = f(x), w = f(y)$ $\Rightarrow u + w = f(x) + f(y) = f(x+y) \in \operatorname{im} f$, $\alpha \cdot u = \alpha f(x) = f(\alpha x) \in \operatorname{im} f$, $0 = f(0) \in \operatorname{im} f$. ✓

□

Ob eine lin. Abb. injektiv ist, kann man leicht anhand ihres Kerns sehen:

13.9. <u>Satz</u>: Sei $f: V \to W$ lin. Abb. Dann gilt: f injektiv $\Leftrightarrow$ $\ker f = \{0\}$.

<u>Bew.</u>: "$\Rightarrow$": Ist f injektiv, hat $0 \in W$ <u>nur</u> das Urbild 0, d.h. $\ker f = \{0\}$.

"$\Leftarrow$": Ist $\ker f = \{0\}$ und $f(x) = f(y)$, so folgt $f(x-y) = 0$, also $x - y \in \ker f = \{0\}$, also $x - y = 0$, also $x = y$. □

Für die Dimensionen der VRe $\ker f$ und $\operatorname{im} f$ gilt eine Formel:

13.10. <u>Rangsatz</u>: Sei V endlich-dim. K-VR, W ein K-VR und $f: V \to W$ linear. Dann gilt:

$$\boxed{\dim \ker f + \dim \operatorname{im} f = \dim V.}$$

13.11. <u>Def.</u>: $\dim \operatorname{im} f \in \mathbb{N}_0$ heißt der <u>Rang</u> von f. Notation: $\underline{\operatorname{rg}(f)} := \dim \operatorname{im} f$.

<u>Bem.</u>: Die Dimension des Bildes (d.h. der Rang von f) ist also nie größer als die Dimension des "Urbildraumes" V! Man nennt den Rangsatz gelegentlich auch den "Dimensionssatz für lineare Abbildungen".

13.12. <u>Beweis von 13.10</u>: <u>Nimm Basis</u> $v_1, \dots, v_r$ <u>von $\ker f$</u> (11.5.1)), <u>ergänze diese</u> nach <u>Basisergänzungsatz 11.5.3)</u> zu Basis $v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n$ <u>von V</u>.

Dann ist durch $f_{/L(v_{r+1}, \dots, v_n)}: L(v_{r+1}, \dots, v_n) \to \operatorname{im} f$ ein Isomorphismus gegeben:
- Lin. Abb. klar nach 13.2.
- ist injektiv: $f(v) = 0$ mit $v \in L(v_{r+1}, \dots, v_n) \Rightarrow v \in \ker f \cap L(v_{r+1}, \dots, v_n)$ $\Rightarrow v \in L(v_1, \dots, v_r) \cap L(v_{r+1}, \dots, v_n) = \{0\}$, also $v = 0$.
- ist surjektiv: Ist $w \in \operatorname{im} f$ mit $f(v) = w$ für $v \in V$, so ist $v \in L(v_1, \dots, v_n)$, also $v = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i + \sum_{j=r+1}^{n} \mu_j v_j$.
  setze $v' := \sum_{j=r+1}^{n} \mu_j v_j \in L(v_{r+1}, \dots, v_n)$,
  dann ist $f(v') = f(v - \sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i) = f(v) - \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \underbrace{f(v_i)}_{=0} = f(v) = w$.

Somit ist $\dim \operatorname{im} f = n - r = \dim V - \dim \ker f$. □

<u>Bem.</u>: Klappt auch für $r = 0$: Dann starten wir mit der Basis $\emptyset$ von $\ker f = \{0\}$, Rest des Beweises genauso. Wir geben in 13.15 noch einen anderen Beweis des Rangsatzes.

13.13. <u>Bsp.</u>: In Bsp. <u>13.6</u> war $V = \mathbb{R}^2$, $W = \mathbb{R}^3$. Der Rang von f kann laut Rangsatz maximal 2 sein; dieser ist zwei, da $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\\,\end{pmatrix}$ lin. unabh. Also ist $\dim \ker f = 0$, d.h. f ist injektiv.

Wir formulieren jetzt den in Satz 12.19 genannten Zusammenhang zwischen Komplementärraum und QuotientenVR in einer einfachen Version, ohne darin Basen zu verwenden:

13.14. **Satz:** Sind U, W UVRe von V mit $V = U \oplus W$. Dann: $W \cong V/U$ und $U \cong V/W$.

Bew.: Mit Basis B von U und Basis B' von W greift 12.19, d.h. $(x+U)_{x\in B'}$ ist Basis von V/U. Wir haben dann den Isomorphismus $f: W \to V/U$, $f(x) := x+U$ für alle $x \in B'$. Somit ist $W \cong V/U$, und analog ist $U \cong V/W$. $\square$

13.15 **Korollar:** Rangsatz 13.10.

Bew.: Sei $U := \ker f$, W ein Komplementärraum von U (ex. laut Satz 12.11). Mit $W \underset{13.14}{\cong} V/U \underset{13.16}{\cong} \operatorname{im} f$ laut Homomorphiesatz 13.16 folgt $\dim V = \dim U + \dim W$

$= \dim \ker f + \operatorname{rg}(f)$. $\square$

Der hier benutzte sogenannte Homomorphiesatz besagt, dass der Quotienten VR $V/\ker f$ isomorph zu $\operatorname{im} f$ ist. Das ist zwar abstrakt, aber offenbar nützlich.

13.16. Homomorphiesatz: Seien V, W zwei K-VRe, $f: V \to W$ linear.

Dann gilt $\boxed{V/\ker f \cong \operatorname{im} f.}$

(Der induz. Isom. $\bar f$ ist eind. best.)

Bew.: Haben:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "k"'] \arrow[dr, phantom, "="] & \operatorname{im} f \subseteq W \\ V/\ker f \arrow[ur, "\bar f"'] & \end{tikzcd}$$

mit kanonischer Abb. $k: V \to V/\ker f$, $v \mapsto v + \ker f$

und lin. Abb. $\bar f: V/\ker f \to \operatorname{im} f$, $v + \ker f \mapsto f(v)$. ⌜$\bar f$ linear ✓⌟

- $\bar f$ ist wohldefiniert, d.h. repräsentantenunabhängig erklärt.
  ⌜Ist $v + \ker f = v' + \ker f$, ist $v = v' + u$ mit $u \in \ker f$. Dann ist $f(v) = f(v'+u)$
  $= f(v') + f(u) = f(v') + 0 = f(v')$, also $\bar f(v + \ker f) = f(v) = f(v') = \bar f(v' + \ker f)$.⌟
- Dann: $f = \bar f \circ k$, d.h. das obige "Diagramm kommutiert" ⌜klar: $\bar f \circ k(v) = \bar f(v + \ker f) = f(v)$ ✓⌟.
- $\bar f$ ist injektiv: Sei $v + \ker f \in \ker \bar f$, d.h. $\bar f(v + \ker f) = 0$, dann ist auch $f(v) = \bar f(v + \ker f) = 0$, also $v \in \ker f$ und $v + \ker f = 0 + \ker f$.
  Also ist $\ker \bar f = \{0 + \ker f\}$, d.h. $\bar f$ ist injektiv nach Satz 13.9.
- $\bar f$ ist surjektiv: Ist $w \in \operatorname{im} f$, etwa $w = f(v)$, so ist $\bar f(v + \ker f) = f(v) = w$, es folgt $w \in \operatorname{im} \bar f$. Also ist $\bar f$ surjektiv. $\square$

Anwendungen des Rangsatzes (13.10)

13.17. **Satz:** Sei V endl.-dim. VR, $f: V \to V$ linear. Dann: f injektiv $\Leftrightarrow$ f surjektiv.

Bew.: $\dim V = \dim \operatorname{im} f + \dim \ker f$ zeigt:

f injektiv $\underset{13.9}{\Leftrightarrow}$ $\ker f = \{0\}$ $\underset{13.10}{\Leftrightarrow}$ $\dim V = \dim \operatorname{im} f$ $\Leftrightarrow$ $\operatorname{im} f = V$ $\Leftrightarrow$ f surjektiv.

$\operatorname{im} f \subseteq V$, 12.2 □

13.18. **Bem.:** • Gilt nicht wenn $f: V \to \underline{W}$ linear: $V = \mathbb{R}$, $W = \mathbb{R}[T]$, $f(v) = 2v$ inj., nicht surj.

• Gilt nicht wenn $f: V \to V$ linear, $\dim V = \underline{\underline{\infty}}$: $V = K[T]$, $f(\sum a_i T^i) = \sum a_i T^{i+1}$ inj., nicht surj.

Wir erhalten aus dem Rangsatz, dass jeder n-dim. K-VR zu K^n isomorph ist, d.h. außer dem K^n gibt es im wesentlichen keinen anderen n-dim. K-VR:

13.19. **Satz:** Jeder K-VR V mit $\dim V = n$ ist isomorph zu K^n.

Bew.: K^n hat kanonische Basis $(e_1, \dots, e_n)$, vgl. 11.4.

Jede Basis $(v_1, \dots, v_n)$ von V liefert einen Isomorphismus $f: V \to K^n$, $f(v_i) = e_i$.

⌜Surjektiv: klar, injektiv wegen Rangsatz: $\dim \ker f = \dim V - \dim \operatorname{im} f = 0$.⌟ □

Bem.: Die Umkehrabb. f^{-1} bildet $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ ab auf $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$.

Der Vergleich der Dimensionen von V und W liefert Aussagen über Injektivität/Surjektivität/Bijektivität der linearen Abb. $f: V \to W$.

13.20. **Satz:** Seien V, W endl.-dim. K-VRe, $f: V \to W$ linear. Dann gilt:

a) Sei $\dim V = \dim W$. Dann gilt: f injektiv $\Leftrightarrow$ f surjektiv $\Leftrightarrow$ f bijektiv.
(In diesem Fall ist f dann ein Isomorphismus.)

b) Sei $\dim V > \dim W$, dann ist f nicht injektiv.

c) Sei $\dim V < \dim W$, dann ist f nicht surjektiv.

Bew.: a): Wie in 13.17 folgt f inj. $\Leftrightarrow$ f surj. In diesem Fall folgt: f bijektiv.
Ist f bijektiv, ist f injektiv und surjektiv.

b) $\dim \operatorname{im} f + \dim \ker f = \dim V > \dim W \geq \dim \operatorname{im} f \Rightarrow \dim \ker f > 0 \Rightarrow \ker f \neq \{0\} \Rightarrow$ f nicht injektiv.

c) $\dim \operatorname{im} f \leq \dim \operatorname{im} f + \dim \ker f = \dim V < \dim W \Rightarrow \operatorname{im} f \subsetneq W \Rightarrow f$ nicht surjektiv. □

13.21. **Bem.:** Ein Isomorphismus $f: V \to W$ erhält alle "strukturellen Eigenschaften": $S \subseteq V$ ist lin. unabh./Erz.system/Basis in V genau wenn $f(S) \subseteq W$ lin. unabh./Erz.system/Basis in W.