# Vorlesung Lineare Algebra I

WiSe'19/'20 hhu
K. Halupczok

§3: Vektorräume

## L12: Summen- und Quotientenvektorräume

Stichworte: Dimension von UVRen, Dimensionsformel, direkte Summe, Vektoren in direkten Summen, QuotientenVRe, Parameterdarstellung affiner Räume

---

Wir studieren jetzt die Dimension von Untervektorräumen. Zunächst leuchtet ein, dass echte UVRe $U \neq V$ kleinere Dimension haben als der umgebende VR $V$. Dies zeigen wir in den nächsten beiden Sätzen.

12.1. Satz: Ein UVR $U$ eines $n$-dim. VRs $V$ hat eine Dimension $\dim U \leq n$.

Bew.: • $U$ ist endl. erzeugt: Mit $\emptyset$ beginnend liefert der Basis-Ergänzungssatz 11.5.3) nach endl. vielen Schritten eine Basis von $U$, oder wir erhielten in $U$ (und damit aber auch $V$) bel. große unabh. Familien, was in einem endl. dim. $V$ nicht geht.
• Sei $(w_1, \dots, w_k)$ Basis von $U$. Sie ist unabh. in $V$, nach Steinitz 11.5.4) ist dann $k \leq n$. $\square$

12.2. Satz: Sei $V$ ein $n$-dim. VR und $U$ ein UVR. Dann gilt: $\dim U = n \Leftrightarrow U = V$.

Bew.: „$\Leftarrow$": klar, „$\Rightarrow$": Sei $B$ eine Basis von $U$ und $x \in V$. Gilt $x \notin L(B) = U$, so ist $B \cup \{x\}$ linear unabh. (wäre $B \cup \{x\}$ abh., wäre dies ein $\lightning$ zu 10.21), im $\lightning$ zu Hilfssatz 11.1.2. Also ist $V \subseteq L(B) = U$, und damit $V = U$. $\square$

Bem.: Für unendl. dim. VRe $V$ ist die Ungl. $\dim U \leq \dim V$ trivial, aus $\dim U = \dim V$ folgt aber nicht notwendig $U = V$.

Spezielle UVRe hatten wir in 9.14 studiert, z.B. Summen $U_1 + U_2$ von UVRen $U_1, U_2$. Für ihre Dimension gilt eine besondere Formel:

12.3. Dimensionsformel für Summen von UVRen:

Seien $U_1, U_2$ UVRe des VRs $V$. Dann gilt:

$$\boxed{\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2)}$$

12.4. **Bem.:** Vgl. Def. 9.14 für $U_1+U_2$, haben $U_1+U_2=L(U_1\cup U_2)$ laut Kor. 9.21.

12.5. **Beweis:** OE alle Dimensionen endlich, sei $m_1=\dim U_1$, $m_2=\dim U_2$.
Sei $(v_1,\dots,v_k)$ Basis von $U_1\cap U_2$ (ev. $k=0 \Leftrightarrow U_1\cap U_2=\{0\}$),
ergänze zu Basis $(v_1,\dots,v_k,u_{k+1},\dots,u_{m_1})$ von $U_1$
und Basis $(v_1,\dots,v_k,w_{k+1},\dots,w_{m_2})$ von $U_2$,
laut Basisergänzungssatz 11.5.3).
Dann: $U_1+U_2=L(v_1,\dots,v_k,u_{k+1},\dots,u_{m_1},w_{k+1},\dots,w_{m_2})$,
d.h. $\dim(U_1+U_2)\le m_1+(m_2-k)$.
Hier "=" statt "≤", weil die Vektoren $v_1,\dots,v_k,u_{k+1},\dots,u_{m_1},w_{k+1},\dots,w_{m_2}$ lin. unabh.
$\ulcorner \sum\lambda_i v_i+\sum\mu_j u_j+\sum\nu_\ell w_\ell=0 \Rightarrow v:=\sum\lambda_i v_i+\sum\mu_j u_j=-\sum\nu_\ell w_\ell\in U_1\cap U_2$
$\Rightarrow v=\sum\alpha_i v_i \Rightarrow 0=v-v=\sum(\alpha_i-\lambda_i)v_i-\sum\mu_j u_j \Rightarrow$ alle $\lambda_i=\alpha_i$, alle $\mu_j=0$
$\Rightarrow \sum\lambda_i v_i+\sum\nu_\ell w_\ell=0 \Rightarrow$ alle $\lambda_i=0$, alle $\nu_\ell=0 \lrcorner$ $\square$

12.6. **Bsp.:** Sei $V=\mathbb{R}^3$, $U_1=L\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$, $U_2=L\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$. Dann: $\dim U_1=2$, $\dim U_2=1$, und $U_1+U_2=V$. Laut Dim.formel ist $3=\dim V=\dim U_1+\dim U_2-\dim(U_1\cap U_2)$ $=2+1-\dim(U_1\cap U_2)$, also folgt $\dim(U_1\cap U_2)=0$, d.h. $U_1\cap U_2=\{0\}$.

Laut Dimensionsformel sind UVRe $U_1,U_2$ mit $U_1\cap U_2=\{0\}$ darin interessant.
Wir kommen so zur direkten Summe von UVRen:

12.7 **Def.:** • Sind $U_1,U_2$ UVRe von $V$ mit $U_1\cap U_2=\{0\}$,
so heißt die Vektorraumsumme $U_1+U_2$ direkt.
Schreiben dann: $U_1\oplus U_2:=U_1+U_2$.
• Sind $U_1,\dots,U_k$ $(k\ge 2)$ UVRe von $V$ mit $\forall i$: $U_i\cap\left(\sum_{j\ne i}U_j\right)=\{0\}$,
so heißt $U_1+\dots+U_k$ direkt,
schreiben dann: $U_1\oplus\dots\oplus U_k=\bigoplus_{i=1}^{k}U_i:=U_1+\dots+U_k$.

12.8. **Bem.:** Spezialfall der Dimensionsformel für $\oplus$: $\dim U_1\oplus U_2=\dim U_1+\dim U_2$.

Ist $V=U_1\oplus U_2$, dann ist die Darstellung von jedem $v\in V$ als $v=u_1+u_2$ eindeutig, d.h. $u_1+u_2=\tilde{u}_1+\tilde{u}_2 \Rightarrow u_1=\tilde{u}_1 \wedge u_2=\tilde{u}_2$.
Dies ist der Spezialfall $k=2$ des folgenden Satzes:

12.9. **Satz:** Es seien $U_1,\dots,U_k$, $k\geq 2$, UVRe von $V$. Dann gilt:
Die Summe $U:=U_1+\dots+U_k$ ist genau dann direkt, wenn jeder Vektor $x\in U$ eine eindeutige Darstellung $x=x_1+\dots+x_k$ mit $x_i\in U_i$ für $i=1,\dots,k$ besitzt.

**Bew.:** „$\Rightarrow$": Sei $U=U_1\oplus\dots\oplus U_k$ (direkt) und sei $x=x_1+\dots+x_k=\tilde{x}_1+\dots+\tilde{x}_k$ mit $x_i,\tilde{x}_i\in U_i$ für jedes $i=1,\dots,k$. Dann folgt $(x_1-\tilde{x}_1)+\dots+(x_k-\tilde{x}_k)=o$,
also $\underbrace{x_i-\hat{x}_i}_{\in U_i}=\underbrace{\sum_{j\neq i}(\hat{x}_j-x_j)}_{\in \sum_{j\neq i}U_j}$. Wegen $U_i\cap\sum_{j\neq i}U_j=\{o\}$ ist dies $=o$, somit ist $x_i=\tilde{x}_i$ für jedes $i$.

„$\Leftarrow$": Zeigen die Kontraposition:
Sei die Summe $U_1+\dots+U_k$ nicht direkt. Es gibt somit ein $i\in\{1,\dots,k\}$ mit $U_i\cap\sum_{j\neq i}U_j\neq\{o\}$. Sei $x_i\neq o$ aus diesem Durchschnitt. Dann gilt $x_i=x_1+\dots+x_{i-1}+o+x_{i+1}+\dots+x_k$ mit $x_j\in U_j$ für $j\in\{1,\dots,k\}\setminus\{i\}$, und da auch $x_i=o+\dots+o+x_i+o+\dots+o$, ist die verlangte Darst. von $x_i$ nicht eindeutig.

$\square$

12.10. **Def.:** Sei $V$ ein VR und $U,W$ UVRe von $V$. Gilt $U\oplus W=V$, so heißen $U$ und $W$ komplementäre UVRe. Genau: $W$ heißt Komplementärraum von $U$ und ebenso heißt $U$ Komplementärraum von $W$.

**Bem.:** Jeder UVR besitzt einen Komplementärraum:

12.11. **Satz:** Sei $V$ ein VR und $U$ ein UVR von $V$. Dann gibt es einen zu $U$ komplementären UVR.

**Bew.:** Ergänzen eine Basis $B$ von $U$ zu einer Basis $B\cup B'$ von $V$, klar: $B\cap B'=\emptyset$.
Dann ist $W=L((B\cup B')\setminus B)=L(B')$ ein solcher Komplementärraum: • $U+W$ $=L(B)+L(B')\overset{9.20}{=}L(B\cup B')=V$, • $x\in L(B)\cap L(B')\Rightarrow x=\sum\lambda_i b_i=\sum\mu_j b_j'\Rightarrow o=\sum\lambda_i b_i+\sum(-\mu_j)b_j'$ $\Rightarrow$ alle $\lambda_i=0$, alle $\mu_j=0$ da $B\cup B'$ lin. unabh. $\Rightarrow x=o$. $\square$

12.12. **Bem.:** • In endl.-dim. VRen kann man zu jedem UVR $U$ einen Komplementärraum konkret angeben. Hierfür gibt es i.a. viele Möglichkeiten, keine bietet sich in natürlicher Weise an.

- In unendl.-dim. VRen ist es i.a. nicht möglich, Komplementärräume konkret anzugeben.
- Wir beschreiben nun eine natürliche Konstruktion, die von $U$ ausgehend zu einem neuen VR $\tilde{W}$ führt, der dann in allen praktischen Problemen die Rolle eines Komplementärraumes von $U$ spielt. Diese Konstruktion ist unabh. von $\dim V$.

## Quotientenvektorräume

12.13 Sei $V$ ein $\mathbb{K}$-VR und $U$ ein UVR. Wir erklären eine Relation $\sim$ auf $V$ durch $x \sim y :\Leftrightarrow x - y \in U$ für alle Paare $(x,y) \in V \times V$.
Diese Relation ist eine Äquivalenzrelation. [reflexiv ✓, symm. ✓, trans. ✓]
Jede Äquivalenzklasse $[x]_U$ ist die Summe $x + U := \{x + u;\ u \in U\}$ $(\neq L(x)+u)$
da ja $y \sim x \Leftrightarrow y - x \in U$, also $y - x = u \Leftrightarrow y = x + u$ für ein $u \in U$ gilt,
also $[x]_U = \{y \in V;\ y \sim x\} = \{x + u;\ u \in U\} = x + U$.
Jede Klasse ist also ein affiner Unterraum, vgl. Def. 9.11.
Für die Menge der Äquivalenzklassen schreibe $\underline{\underline{V/U}} := \{x + U \mid x \in V\}$.

12.14. <u>Satz:</u> $V/U$ ist ein VR bzgl. den Verknüpfungen $+, \cdot$, die def. werden durch
$$(x+U) + (y+U) := (x+y) + U$$
$$\alpha \cdot (x+U) := (\alpha x) + U \quad \text{für } x,y \in V, \alpha \in \mathbb{K}.$$

12.15. <u>Def.:</u> Der Vektorraum $V/U$ heißt <u>Quotientenraum</u> / <u>Quotientenvektorraum</u>, sprich "$V$ durch $U$", "$V$ modulo $U$", "$V$ mod $U$", ...

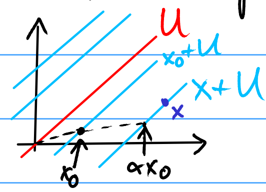
12.16. <u>Bew.:</u> • "+", "·" wohldefiniert, d.h. repräsentantenunabh., da $U$ ein UVR von $V$ ist:
- $x_1 + U = x_1' + U$, $x_2 + U = x_2' + U$ zeigt $x_1 = x_1' + u_1$, $x_2 = x_2' + u_2$ mit $u_1, u_2 \in U$. Dann ist $(x_1 + x_2) + U = x_1' + u_1 + x_2' + u_2 + U = (x_1' + x_2') + U$, $(\alpha x_1) + U = \alpha x_1' + \alpha u_1 + U = (\alpha x_1') + U$.
- Die VR-Axiome 9.3 sind alle von Hand leicht nachprüfbar.

Das neutrale El. in $(V/U, +)$ ist die Klasse $0 + U = U$, das Inverse der Klasse $x + U$ ist $-x + U$. □

12.17. <u>Bem.:</u> • Für $U = \{0\}$ gilt $x + U = \{x\}$, so dass in diesem Fall $V/\{0\}$ mit $V$ identifiziert werden kann. • Für $U = V$ erhalten wir $V/V = \{0 + V\}$.
- $\tilde{W} = V/U$ ist der in Bem. 12.12 gemeinte VR, sehen in Satz 12.19, warum.

12.18. **Bsp.:** $V=\mathbb{R}^2$, sei $U = L\left(\binom{1}{1}\right) = \left\{\binom{x}{x}\in\mathbb{R}^2 \mid x\in\mathbb{R}\right\}$ die Gerade durch $o$ und $\binom{1}{1}$.
Dann ist $V/U = \{x+U \mid x\in V\}$ die Geradenschar der zu $U$ parallelen Geraden.
Diese bildet wieder einen $\mathbb{R}$-VR gemäß

$$(x_1+U)+(x_2+U) = (x_1+x_2)+U,$$
$$\alpha\cdot(x+U) = (\alpha x)+U.$$




$(x_0+U)$: Familie der Länge 1

Es ist hier $\dim V/U = 1$, denn jedes $(x_0+U)$ mit $x_0\notin U$ bildet Basis:
‖ Für $x+U\in V/U$ mit $x\notin U$ ist $x=\alpha x_0+u$ für ein $\alpha\in\mathbb{R}$, $u\in U$,
also $x+U = \alpha x_0 + U = \alpha\cdot(x_0+U)$, d.h. $(x_0+U)$ erzeugt $V/U$. ‖

12.19. **Satz:** Sei $U$ ein UVR von $V$ und $B$ eine Basis von $U$.
Ist $B\cup B'$ eine Basis von $V$ und $B\cap B'=\emptyset$, so ist $(x+U)_{x\in B'}$ eine Basis von $V/U$ (der Länge $\# B'$).

12.20. **Kor.:** Sei $U$ ein UVR von $V$. Dann gilt $\dim V = \dim U + \dim V/U$.
**Bew.:** Haben $V = U\oplus L(B')$ in Satz 12.19, und $\dim V/U = \# B' = \dim(L(B'))$.
Dann Dimensionsformel 12.3. □

12.21. **Bew. von Satz 12.19:** Sei $\tilde{B} := (x+U)_{x\in B'}$. Zeigen $\#\tilde{B} = \# B'$, und dass $\tilde{B}$ eine Basis von $V/U$ ist:

- $\tilde{B}$ ist Erz.system, d.h. $L(\tilde{B}) = V/U$: Sei $z+U\in V/U$ bel. Der Vektor $z\in V$ hat die Darstellung $z = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_k x_k + \beta_1 y_1 + \ldots + \beta_m y_m$ mit $x_i\in B\subseteq U$, $\alpha_i\in\mathbb{K}$ für $i\in\{1,\ldots,k\}$ und $y_j\in B'$, $\beta_j\in\mathbb{K}$ für $j\in\{1,\ldots,m\}$. Daraus folgt
$$z+U = \beta_1(y_1+U)+\ldots+\beta_m(y_m+U) \text{ mit } y_j+U\in\tilde{B} \text{ für } j\in\{1,\ldots,m\}.$$
- $\tilde{B}$ ist lin. unabh. und es gilt $\#\tilde{B} = \# B'$: Es genügt zu zeigen, dass für alle $k\in\mathbb{N}$ und alle lin. unabh. Vektoren $x_1,\ldots,x_k\in B'$ die Vektoren $x_1+U,\ldots,x_k+U\in V/U$ ebenfalls lin. unabh. sind. Dies gelingt so:
⌈Aus $\alpha_1(x_1+U)+\ldots+\alpha_k(x_k+U) = o+U$ folgt $(\alpha_1x_1+\ldots+\alpha_kx_k)+U = o+U$, also $\alpha_1x_1+\ldots+\alpha_kx_k\in U$. Wegen $U\cap L(B') = \{o\}$ folgt $\alpha_1x_1+\ldots+\alpha_kx_k = o$, und daraus ergibt sich $\alpha_1=\ldots=\alpha_k=0$.⌋ □

Den affinen Unterräumen von $U$, die also die Elemente des Quotientenraums bilden, ordnet man auch eine Dimension zu, nämlich die von $U$.

1.2.22. **Def.:** Sei $V$ ein VR, $U$ ein UVR und $a \in V$.

- Ist $a+U$ ein affiner UR, setzt man $\dim(a+U) := \dim U$.
- Affine URe von $V$ der Dimension 1 heißen Geraden in $V$,
  " " " 2 " Ebenen in $V$,
  " " " $n-1$ " Hyperebenen in $V$, falls $n = \dim V$.
- Ist $a+U$ ein affiner UR, so heißt $U$ sein Richtungsraum.
  Ist darin $U = L(x_1, \dots, x_m)$ mit einer Basis $(x_1, \dots, x_m)$ von $U$, so heißen $x_1, \dots, x_m$ Richtungsvektoren von $a+U$.
- Parameterdarstellung einer Geraden: $a + L(x)$ mit $a, x \in V$, $x \neq 0$
  Parameterdarstellung einer Ebenen: $a + L(x_1, x_2)$ mit $a, x_1, x_2 \in V$, wo $x_1, x_2$ linear unabh.
  Parameterdarstellung einer Hyperebenen: $a + L(x_1, \dots, x_{n-1})$ mit $a, x_1, \dots, x_n \in V$, wo $x_1, \dots, x_{n-1}$ lin. unabh. $(n = \dim V)$
  Der Vektor $a$ in der Parameterdarstellung heißt Aufpunktvektor (und ist nicht eind. bestimmt).
- Die affinen URe $a+U_1$ und $b+U_2$ heißen parallel, falls für die zugehörigen Richtungsräume gilt: $U_1 \subseteq U_2$ oder $U_2 \subseteq U_1$.
  Ü Ist Parallelität eine Äquivalenzrelation (ev. abh. von $\dim U_i$)?