Vorlesung Lineare Algebra I

WiSe'19/'20 hhu
K. Halupczok

§3: Vektorräume

L11: Basis und Dimension

Stichworte: Basis, Basissatz, Basisergänzungssatz, Austauschsatz von Steinitz, Dimension, un-/endlichdimensionale VRe, Charakterisierung einer Basis

---

11.1. Motivation: In einem VR V sind besonders jene lin. unabh. Mengen B wichtig, die die Eigenschaft haben, dass sich jeder Vektor aus V durch Vektoren von B linear kombinieren lässt. Diese Linearkombinationen sind dann eindeutig bestimmt (vgl. Satz 11.19(4) unten).

11.2. Def.: Eine Familie B von Vektoren eines VRs V heißt Basis von V, falls $V = L(B)$ und B lin. unabh. ist.

11.3. Bem. zum Begriff: • Eine Basis von V ist ein linear unabhängiges Erzeugendensystem von V.

• Eine Basis mit $\# B < \infty$ heißt endlich.

• Wir schreiben "Familie" und nicht einfach nur $B \subseteq V$ in 11.2, damit die Vektoren von B eine Numerierung erhalten. Im Falle einer endlichen Basis ist dies also eine endliche Familie $v_1, \dots, v_n$ in einer bestimmten Reihenfolge. Wir werden deswegen auch $B = (v_1, \dots, v_n)$ schreiben. In Def. 11.2., aber auch im Begriff "Lineare (Un-)Abhängigkeit" spielte die Reihenfolge zunächst noch keine Rolle. Für die Darstellung als LKen von Vektoren $x \in L(B)$ hingegen schon, wenn man nur noch auf die Koeffiziententupel dieser LKen schauen möchte:

Bem.: $v_1, \dots, v_n$ Basis $\Rightarrow v_1, \dots, v_n$ p.w.V. (keine "Mehrfachnennung")

11.4. Bsp.: Standardbasis / Kanonische Basis: Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Dann bilden die kanonischen Einheitsvektoren $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ die Standardbasis $(e_1, \dots, e_n)$. Sie wird auch kanonische Basis genannt.

In $e_i \in \mathbb{K}^n$ ist also die i-te Komponente $= 1$, alle anderen $= 0$.

Jeder Vektor $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ ist LK dieser Basisvektoren: $v = \sum_{i=1}^{n} v_i e_i$.

Bsp. im $\mathbb{R}^3$: $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = 2e_1 + e_2 - 4e_3$. Bei Umnumerierung: $b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

ist $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = b_1 - 4b_2 + 2b_3 \leadsto$ wird durch das Koeff.tupel $\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ beschrieben!

11.5 Wichtige Sätze über Basen in Vektorräumen:
1.) Basissatz: Jeder Vektorraum besitzt eine Basis.
2.) Eindeutigkeit der Basislänge: Alle Basen eines Vektorraumes haben dieselbe Kardinalität/Länge, d.h. sind gleichmächtig.
3.) Basisergänzungssatz: In jedem VR lässt sich jede linear unabh. Menge zu einer Basis ergänzen.
4.) Austauschsatz von Steinitz:
Ist B eine Basis des VRs V und $S \subseteq V$ linear unabh. Menge, so gibt es eine Teilmenge $T \subseteq B$ derart, dass $\#T = \#S$ gilt und $(B \setminus T) \cup S$ eine Basis ist. [Tauschen Elemente von B gegen Elemente von S aus]

11.6. Beweis von 2.) und 3.):
- Aus 4.) folgt 2.): Sind B, S endliche Basen, ist $(B \setminus T) \cup S$ Basis $\Rightarrow \#S \leq \#B$ und $(S \setminus T_2) \cup B$ Basis $\Rightarrow \#B \leq \#S$.

Bei unendlichen Basen: Je zwei können bijektiv aufeinander abgebildet werden. (ohne Beweis)
- Aus 1.), 4.) folgt 3.): Nimm irgendeine Basis B (wg. 1.)) und tausche eine Teilmenge T davon aus durch die linear unabh. Menge (mit 4.)). $\square$

11.7. Def.: Wegen 2.) ist die Kardinalität einer Basis von V eindeutig bestimmt. Wir nennen diese die Dimension von V. In Zeichen: $\dim V := \#B$ für irgendeine Basis B von V. Die Dimension ist wegen 2.) wohldefiniert, d.h. unabhängig von der Wahl der Basis.
Schreiben auch $\dim_K V$ für $\dim V$.

11.8. Bem. zur Dimension:
- Haben $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n = n$, da die n Einheitsvektoren $e_1, \ldots, e_n \in \mathbb{K}^n$ eine Basis des $\mathbb{K}^n$ bilden [vgl. 11.4].
- $\dim_{\mathbb{K}} \{0\} = 0$: $\emptyset$ ist linear unabh. und Erzeugendensystem von $\{0\}$, also eine Basis von $\{0\}$.
(Beachte: Die Familie (0) ist linear abhängig in V.)
- Für unendlichdimensionale VRe V, d.h. falls eine unendliche Basis existiert, schreiben wir symbolisch $\dim V = \infty$. Andernfalls heißt V endlichdimensional, wir schreiben dies als $\dim V < \infty$.

11.9. Bem. zu 11.5.: • Der Basissatz 11.5.1.) ist in der dort angegebenen Form für beliebige VRe gültig. In dieser Form ist er äquivalent zum Auswahlaxiom! Gelegentlich wird er in Vorlesungen zur Linearen Algebra bewiesen; dabei wird vom Auswahlaxiom in der Form des Zornschen Lemmas (bzw. Lemma von Zorn) Gebrauch gemacht und ist daher nicht konstruktiv, d.h. der Beweis zeigt nur die Existenz einer Basis, aber liefert keinerlei Konstruktionsmöglichkeit von Basen.
• Die obige Version 11.5.4.) des Steinitzschen Austauschsatzes benötigt in dieser Form ebenso das Auswahlaxiom. Dies gilt analog für die Eindeutigkeit der Basislänge 11.5.2.) (für unendliche Basen).
• Die Sätze sind in dieser Form zwar prinzipiell interessant, haben aber praktisch keine nicht-trivialen Anwendungen.
Wir werden in diesem Kapitel L11 daher nur den Beweis von 1.) und 4.) in der Version für endlich erzeugte VRe führen.
(Die Beweise von 2.)+3.) sind in diesem Fall oben in 11.6 komplett ausgeführt.)

11.10. Def.: Ein Vektorraum V heißt endlich erzeugt, falls es eine endliche Teilmenge S von V gibt mit $L(S) = V$.

11.11. Basissatz 1.) für endl. dim. VRe: Jeder endlich erzeugte VR besitzt eine (endliche) Basis.
Bem.: Ein endlich erzeugter VR hat eine endliche Basis, also eine endliche Dimension. Nicht endlich erzeugte VRe sind unendlich dimensional.

11.12. Zum Beweis verwenden wir folgendes Korollar aus Satz L10.18.
Hilfssatz:
Wird ein UVR U in einem VR V von n Vektoren erzeugt, so ist jede Teilmenge T von U mit $\#T \geq n+1$ linear abhängig.
Bew.: Dies ist Satz L10.18 mit $U = L(v_1, \dots, v_n)$. □

11.13. **Bew. des Basissatzes 11.11:**

- Seien $v_1, \dots, v_m$ in V lin. unabh. Bilden diese ein Erz.system, ist eine Basis gefunden. Andernfalls ist der UVR $U := L(v_1, \dots, v_m)$ echt in V enthalten, d.h. $U \subsetneqq V$, und $\exists\, v_{m+1} \in V \setminus U$.
- Wären $v_1, \dots, v_{m+1}$ lin. abh., wäre v_{m+1} nach dem Abhängigkeitslemma 10.21 eine Lin.Komb. von $v_1, \dots, v_m$, also $v_{m+1} \in U$ im ↯ zur Wahl von v_{m+1}.
  Also sind $v_1, \dots, v_{m+1}$ lin. unabh.
- Das Verfahren kann so fortgesetzt werden. Nach endlich vielen Schritten bricht es ab wegen Hilfsatz 11.12. Man erhält dann eine (endliche) Basis. □

11.14. Der Beweis des Steinitzschen Austauschsatzes 4.) wird möglich mit dem **Auswahllemma:** Sei $(v_1, \dots, v_m)$ Basis von V, $w = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m$ mit $\lambda_k \neq 0$.
Dann ist $(v_1, \dots, v_{k-1}, w, v_{k+1}, \dots, v_m)$ Basis von V.

11.15. **Bem. zum Auswahllemma:** Zu jedem $w \neq 0$ gibt es so einen Index k. Damit kann man jedes $w \neq 0$ gegen ein geeignetes Basiselement austauschen und erhält jeweils wieder eine Basis von V. Wir zeigen im Auswahllemma-Beweis "erzeugend" und "linear unabhängig" direkt. Für Steinitz gehen wir dann damit induktiv vor.

11.16. **Beweis des Auswahllemmas:** Die Basis sei OE so nummeriert, dass $\lambda_1 \neq 0$.

1. Beh.: $(w, v_2, \dots, v_m)$ ist erzeugend. ⌜Es ist $w = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i$, also
$$\lambda_1 v_1 = w - \sum_{i=2}^{m} \lambda_i v_i, \quad \text{also} \quad v_1 = \frac{1}{\lambda_1} w - \sum_{i=2}^{m} \frac{\lambda_i}{\lambda_1} v_i \in L(w, v_2, \dots, v_m).$$
Mit Lemma 9.25 ist dann $V \supseteq L(w, v_2, \dots, v_m) = L(w, v_1, v_2, \dots, v_m)$
$\supseteq L(v_1, v_2, \dots, v_m) = V$, so dass $V = L(w, v_2, \dots, v_m)$.

2. Beh.: $(w, v_2, \dots, v_m)$ ist linear unabhängig. ⌜Setzen wir in $0 = \mu w + \sum_{i=2}^{m} \mu_i v_i$ die Darstellung für w ein, so folgt $0 = \mu \sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i + \sum_{i=2} \mu_i v_i$
$= \mu \lambda_1 v_1 + \sum_{i=2}^{m} (\mu \lambda_i + \mu_i) v_i$. Da $(v_1, \dots, v_m)$ linear unabhängig sind, muss $0 = \mu \lambda_1$ und $0 = \mu \lambda_i + \mu_i$ für alle restlichen Indizes $i \geq 2$ gelten.
Wegen $\lambda_1 \neq 0$ liefert dies zunächst $\mu = 0$ und dann $\mu_2 = \dots = \mu_m = 0$.⌟ □

L11

-5-

11.17. Version des Steinitzschen Austauschsatzes[4)] für endl. erz. VRe, d.h. wir arbeiten mit endlichen Familien.)

Ist $\underbrace{(v_1, v_2, \ldots, v_n)}_{=B}$ Basis von V und $\underbrace{(w_1, w_2, \ldots, w_k)}_{=S}$ eine linear unabhängige Familie, so ist $k \leq n$, und bei geeigneter Nummerierung der v_i ist $(\underbrace{w_1, \ldots, w_k}, v_{k+1}, \ldots, v_n)$ Basis von V.)

Tauschen El. von B gegen El. von S aus

11.18. Der Beweis von 11.17 erfolgt durch Induktion über $k \in \mathbb{N}_0$:

Im Falle $k=0$ sind keine Vektoren auszutauschen und der Satz ist richtig.

Sei nun $k>0$ und der Satz für $k-1$ schon bewiesen. Wir haben damit also $k-1 \leq n$, und dass $(w_1, \ldots, w_{k-1}, v_k, \ldots, v_n)$ Basis von V ist.

- Falls $k-1=n$ wäre, wäre schon $(w_1, \ldots, w_{k-1})$ Basis von V. Dann wäre aber speziell $w_k \in L(w_1, \ldots, w_{k-1})$, was aber wegen der Lin. Unabh. der $(w_1, \ldots, w_k)$ nicht sein kann. Dieser Fall tritt also nicht ein.
- Also ist notwendig $k-1<n$, d.h. $k \leq n$. Da $(w_1, \ldots, w_{k-1}, v_k, \ldots, v_n)$ eine Basis ist, gibt es eine Darstellung $w_k = \lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_{k-1} w_{k-1} + \mu_k v_k + \ldots + \mu_n v_n$.

Wären alle $\mu_i = 0$, kämen wir auf denselben Widerspruch wie oben.

Also ist wenigstens eines dieser $\mu_i \neq 0$, nach geeigneter Nummerierung also $\mu_k \neq 0$.

Mit dem Auswahllemma 11.14 folgt dann, dass auch $(w_1, \ldots, w_{k-1}, w_k, v_{k+1}, \ldots, v_n)$ eine Basis ist. $\square$

11.19. Für beliebige VRe, ob endlich- oder unendlich dimensional, gilt folgender Satz.

Satz, der "Basis" charakterisiert / Basis-Charakterisierungssatz:

Sei V ein K-VR, $\emptyset \neq B \subseteq V$. Dann sind äquivalent:

(1) B Basis von V, (2) B ist ein minimales Erzeugendensystem von V,

(3) B ist eine maximale lin. unabh. Teilmenge von V,

(4) Jeder Vektor $v \in V$ ist Lin. Komb. von Vektoren aus B, und jede derartige Lin. Komb. ist eindeutig (d.h. der Koeff. λ vor jedem $v \in B$ ist eind.).

11.20. Bem.: In (2) ist ein minimales Element der Menge der Erzeugendensysteme von V gemeint, diese Menge ist mit "$\subseteq$" angeordnet. In (3) analog ein maximales El. der Menge der lin. unabh. Teilmengen von V, auch diese Menge ist mit "$\subseteq$" angeordnet. Vgl. dazu 5.11.

11.21. Bew. von 11.19 (durch Ringschluss, vgl. L4.15):

(1)⇒(2): B nicht minimal $\Rightarrow \exists A \subsetneq B: L(A) = V$, o.E. $A \neq \emptyset$.
Mit $U = L(A)$ folgt nun aus Hilfssatz 11.12, dass B lin. abh., ↯ zu (1).

(2)⇒(3): • B nicht lin. unabh. $\overset{L10.22}{\Rightarrow} \exists x \in B: L(B) = L(B \setminus \{x\}) \Rightarrow$ B nicht minimal, ↯ zu (2).
• B nicht maximal $\Rightarrow \exists A \supsetneq B$, A lin. unabh. $\overset{L10.22}{\Rightarrow} \exists v \in A \setminus B$: v keine Lin.Komb. von Vektoren aus B, ↯ zu (2).

(3)⇒(4): • $V \neq L(B) \Rightarrow \exists v \in V \setminus L(B) \Rightarrow B \cup \{v\} \supsetneq B$, $B \cup \{v\}$ lin. unabh. ↯
• Eindeutigkeit der Lin.Komb. wegen Lin. Unabh. der Vektoren in B, im Detail: $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i$ für Basisel. $v_1, \dots, v_n \in B \Rightarrow \sum (\lambda_i - \mu_i) v_i = 0 \Rightarrow$ alle $\lambda_i = \mu_i$.

(4)⇒(1): B erzeugt V, und B lin. unabh.: Sind $v_i \in B$ mit $\sum \lambda_i v_i = 0 = \sum 0 \cdot v_i$
$\Rightarrow$ alle $\lambda_i = 0$ wegen Eindeutigkeit der Linkomb. □

Bem.: Die Charakterisierung (4) zeigt uns die Nützlichkeit des Basisbegriffs. Man kann (1)⇔(4) auch ohne den Umweg über (2), (3) beweisen.

11.22. Zusammenfassung: Wir unterscheiden die folgenden zwei Fälle bzw. "Arten" von VRen:

endl.-dim. VRe ← 1. Fall: in V gibt es ein endliches Erzeugendensystem A.

"Basisauswahl-Satz" → Dann gibt es eine Teilmenge $B \subseteq A$, die Basis ist.

⌜Ist A minimal, fertig wegen Satz 11.19(2). Sonst ist echte Teilmenge $A_1 \subsetneq A$ ein Erzeugendensystem. Nach spätestens $\#A$ Schritten wird ein minimales Erz.system gefunden.⌟

Dieser Basisauswahlsatz beinhaltet den Basissatz 11.11, und wir haben hier einen zweiten Beweis, der 11.19(2) benutzt, angegeben.

unendl.-dim. VRe ← 2. Fall: Sonst, dann muss die Existenz einer Basis mit dem Auswahlaxiom hergeleitet werden, in der Form des Zornschen Lemmas.