INHALTSVerzeichnis der Vorlesung Lineare Algebra I

WiSe '19/'20 hhu
K. Halupczok

§1: Mathematische Grundbegriffe

L1: Einführung

Definition, Aussage, Variablen, Satz/Theorem/Lemma/Proposition/Korollar, Def. Aussage, Aussageform, Verknüpfungen $\wedge \vee \neg$, Wahrheitstafeln, Klammern

---

L2: Logikregeln und Quantoren

Implikation $\Rightarrow$, Äquivalenz $\Leftrightarrow$, Logikregeln, direkter und indirekter Beweis, Prädikat, Quantoren $\forall \exists$, Verneinung/Umgang mit Quantoren

---

L3: Elementare Mengenlehre und Beweise

Menge, Element, $\emptyset$, Mengenverknüpfungen $\cap \cup \setminus$, Mengenbeziehung $\subseteq$, Formulieren von Sätzen/Beweisen, Beweise von Aussagen mit Quantoren

---

L4: Praktische Tipps bei Beweisen

Voraussetzungen zusammenfassen, direkter und indirekter Beweis, Kontrapositionsbeweis, Widerspruchsbeweis, Beweistechniken, Widerlegen von (falschen) Aussagen, Vollständige Induktion

---

L5: Relationen

Kartesisches Produkt, Relation, Eigenschaften von Relationen, Äquivalenzrelation und -klassen, Quotientenmenge, Beispiele, Def. Abbildung/Funktion

---

L6: Abbildungen

Def. Abbildung, Bild und Urbild, surjektiv/injektiv/bijektiv, Komposition, Umkehrabb./inverse Abbildung, besondere Abbildungen, endliche Mengen

---

§2: Algebraische Grundbegriffe

L7: Gruppen, Ringe, Körper

Halbgruppe, Gruppe, Ring, Körper, Restklassenring $\mathbb{Z}/M$, $\mathbb{Z}/M$ Körper $\Leftrightarrow$ M Primzahl, endliche Körper $\mathbb{F}_p$

L8: Konkrete Gruppen, Ringe, Körper

Konstruktion der Zahlbereiche $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ mit Ä-Relationen, Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$, Polynome, Polynomdivision, Nullstellenabspaltung

---

§3: Vektorräume

L9: Vektorräume und Untervektorräume

Bezeichnungen, Vektorraum, Untervektorraum, Familien, $\cap, \cup$ von Vektorräumen, Lineare Hülle $L(S)$ für $S \subseteq V$, Erzeugendensystem

---

L10: Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit, LGSe

Lineare Abh./Unabh., LGS, Lösungsmenge, homogenes/inhomogenes LGS, elementare (Zeilen)umformungen, nichttriv. Lösbarkeit: homogenes LGS, lin. (un-)abh. Vektorenmengen

---

L11: Basis und Dimension

Basis, Basissatz, Basisergänzungssatz, Austauschsatz von Steinitz, Dimension, un-/endlichdimensionale VRe, Charakterisierung einer Basis

---

L12: Summen- und Quotientenvektorräume

Dimension von UVRen, Dimensionsformel, direkte Summe, Vektoren in direkten Summen, QuotientenVRe, Parameterdarstellung affiner Räume

---

§4: Lineare Abbildungen und Matrizen

L13: Definition und Eigenschaften linearer Abbildungen

Lineare Abbildung, Isomorphie, Basen und lin. Abb.en, Kern, Bild, f inj. $\Leftrightarrow$ $\ker f = \{0\}$, Rangsatz, Homomorphiesatz, jeder n-dim. K-VR ist isomorph zu K^n

---

L14: Matrizenrechnung

Matrizenrechnung, spezielle Matrizen, lineare Abbildungen und Matrizen, Koordinatenvektor und kanonischer Isomorphismus, darstellende Matrix

---

L15: Matrixdarstellungen und Hom(V,W)

Sylvester-Rangsatz, $\mathrm{Hom}(V,W) \cong K^{m \times n}$, $g \circ f(x)$ entspricht $(B \cdot A) \cdot x$. Assoziativität des Matrixprodukts, f^{-1} entspricht A^{-1}, Dualraum V^*, transponierte Abb. f^T

L16: Matrixform eines LGS

LGS in Matrixform, Zeilenrang = Spaltenrang, Zeilenstufenform, LGS-Lösungskriterien, Gaußeliminationsverfahren, inverse/transponierte Matrix

---

L17: Basiswechsel

Basiswechsel, Matrixdarstellungen zu verschiedenen Basen, Basiswechselsatz, Spezialfälle, äquivalente und ähnliche Matrizen, Rang äquivalenter Matrizen

---

§5: Endomorphismen

L18: Determinantenfunktionen

Determinantenfunktion, normierte Determinantenfunktion, Eindeutigkeit, Existenz durch Konstruktion, Det eines Endos von K^n bzw. V

L19: Determinante einer Matrix

Determinante einer Matrix, Entwicklungssatz von Laplace, Streichungsmatrizen, vereinfachtes Gaußeliminationsverfahren, algebraisches Komplement, Cramersche Regel

---

L20: Eigenwerte und Eigenvektoren

EWe, EVen, Spektrum, Lin. Unabh. von EVen zu versch. EWen, Diagonalisierbarkeit, charakteristisches Polynom, Spur, Eigenraum, Existenz von EWen

---

L21: Diagonalisierbarkeit, Trigonalisierbarkeit

Diagonalisierbarkeitskriterien mit Eigenräumen und χ_A bzw. χ_f, geometrische und algebraische Vielfachheit eines EWes, trigonalisierbar, Fahnenbasis

---

§6: Euklidische und unitäre Vektorräume

L22: Räume mit Skalarprodukt

Bilinearform, hermitesch/symmetrisch, Sesquilinearform, positiv (semi-)definit, Skalarprodukt, euklidischer/unitärer Raum, Standardskalarprodukt, Norm $\|\cdot\|$, Cauchy-Schwarz, Δ-Ungl.

L23: Geometrie im $\mathbb{R}^n$

senkrecht/orthogonal, elementargeom. Sätze, Winkelmessung, Kosinussatz, Drehmatrizen, Vektorprodukt, Orthonormalsystem, Orientierung eines ONS, Hesse-Normalform, Lot

---

L24: Orthonormalbasen

(B)O(N)S, O(N)B, Schmidt-Orthogonalisierung, orthogonales Komplement, Proximum, approximative Lösung eines unlösbaren LGS, adjungierte Matrix, Normalengl.

L25: Normale Endomorphismen

hermitesch adjungierter Homomorphismus, normal/unitär/orthogonal/selbstadjungiert/symmetrisch, Spalten einer unitären Matrix sind ONB, EVen zu versch. EWen eines normalen f sind orthogonal

---

L26: Hauptachsentransformation

Hauptachsentransformation für normale Endos/Matrizen, 1. Spezialfall: selbstadj., 2. Spezialfall: unitär/orthogonal, Isometrie, (reelle) Normalform für orthogonale Endos/Matrizen

---