Mathematisches Institut
Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Dr. Benno Kuckuck

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Zweite Klausur Lineare Algebra I

Wintersemester 2017/2018
05.04.2018

Nachname: ....

Vorname: ....

Matrikelnr: ....

Bitte beachten Sie die folgenden Hinweise:

- Beginnen Sie die Klausur nur nach der allgemeinen Aufforderung.
- Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
- Beginnen Sie jede neue Aufgabe jeweils auf einem neuen Blatt.
- Begründen Sie all Ihre Aussagen sorgfältig, falls nicht anders verlangt.
- Die Bearbeitungszeit beträgt insgesamt 120 Minuten.
- Geben Sie am Ende die Aufgabenblätter und Ihre jeweiligen Lösungsblätter geordnet ab.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*16 Punkte*)

(a) Markieren Sie für jede Aussage direkt auf diesem Blatt, ob diese wahr (W) oder falsch (F) ist. (Keine schriftlichen Begründungen!)

W	F	
☐	☐	Der Rang eines Vektorsystems $(v_1, \ldots, v_m)$ im Standardvektorraum $\mathbb{R}^n$ beträgt höchstens $\min\{m, n\}$.
☐	☐	Für Untervektorräume U, W eines endlich dimensionalen Vektorraums V mit $V = U \oplus W$ gilt $U \cap W = \varnothing$.
☐	☐	Die Determinante einer reellen 5×5-Matrix A ist positiv genau dann, wenn A invertierbar und symmetrisch ist.
☐	☐	Die reellen Polynome bilden bzgl. der Standardverknüpfungen einen unendlich dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}[X]$.
☐	☐	Es gibt eine 2×2-Matrix über dem Körper $\mathbb{F}_3$ mit drei Elementen, die keinen Eigenwert in $\mathbb{F}_3$ besitzt.

Bearbeiten Sie Aufgabenteile (b) und (c) auf einem Extrablatt.

(b) Geben Sie ohne Beweis für beliebig dimensionale Vektorräume an:

(i) mindestens zwei verschiedene Charakterisierungen einer Vektorraumbasis sowie

(ii) den Basisergänzungssatz.

(c) Entscheiden Sie für jede der nachstehenden Aussagen, ob diese wahr oder falsch ist, und geben Sie einen Beweis bzw. ein Gegenbeispiel an.

(i) Seien $\alpha, \beta \colon V \to V$ Endomorphismen eines endlich dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraums V. Haben α und β die gleichen Eigenwerte in $\mathbb{C}$, mit jeweils gleichen algebraischen Vielfachheiten, so existiert ein linearer Isomorphismus $\gamma \colon V \to V$ mit $\alpha\gamma = \gamma\beta$.

(ii) Für $n \in \mathbb{N}$ und $A = (a_{i,j}) \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ erfüllen die gewöhnliche Determinante $\det(A)$ und die sogenannte *Permanente*

$$\mathrm{perm}(A) = \sum_{\sigma \in \mathrm{Sym}(n)} \prod_{i=1}^{n} a_{i,i\sigma}$$

stets die Ungleichung $\det(A) \leq \mathrm{perm}(A)$.

(*Bewertung in Aufgabe 1, Teil* (a)*: pro korrekte Antwort 1 Punkt.*)

Aufgabe 2 (*14 Punkte*) Für $t \in \mathbb{R}$ seien $\varphi_t, \psi_t \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ linear mit

$$\begin{aligned} (1,2)\varphi_t &= (1,\, t,\, t^2), & (0,1)\varphi_t &= (-t,\, t,\, -t), \\ (1,2)\psi_t &= (4-6t,\, t,\, -2t^2+3t+9), & (0,1)\psi_t &= (-1+t,\, t,\, t^2-2t-3). \end{aligned}$$

(a) Bestimmen Sie jeweils eine Basis für $\mathrm{Kern}(\varphi_t)$ und $\mathrm{Bild}(\varphi_t)$, in Abhängigkeit von t.

(b) Weiter sei $\pi \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y,z) \mapsto (x,y)$. Für welche t ist die Hintereinanderausführung $\psi_t\pi \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ invertierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Zeigen Sie, dass $U_t = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid v\varphi_t = v\psi_t\}$ unabhängig von t ist, indem Sie eine Basis für U_t als Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$ bestimmen.

Aufgabe 3 (*12 Punkte*) Betrachten Sie die lineare Abbildung

$$\alpha \colon \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^3,\ (x,y,z) \mapsto (6y+z,\, -4x-11y+z,\, -3z).$$

(a) Bestimmen Sie die Koordinatenmatrix $A = [\alpha]_{\mathfrak{E}}$ bzgl. der Standardbasis $\mathfrak{E} = (e_1, e_2, e_3)$ sowie das charakteristische Polynom von α.

(b) Berechnen Sie die Eigenwerte und die Eigenräume des Endomorphismus α, letztere, indem Sie jeweils eine geeignete Basis bestimmen.

(c) Entscheiden Sie, ob α über $\mathbb{Q}$ diagonalisierbar ist, und begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 4 (*12 Punkte*) Sei $\mathbb{F}_7 = \{0,1,2,3,4,5,6\}$ der Körper mit 7 Elementen. Für $t \in \mathbb{F}_7$ sei

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 6 & 6 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ t & 1 & t & 6 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{F}_7).$$

(a) Bestimmen Sie durch geeignete Zeilen- oder Spaltenumformungen den Rang der Matrix A_t, in Abhängigkeit von t.

(b) Bestimmen Sie die Determinante von A_t, in Abhängigkeit von t.

(c) Für welche t ist A_t invertierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 5 (*14 Punkte*) Seien U, W Untervektorräume eines endlich dimensionalen Vektorraums V über einem Körper K.

(a) Zeigen Sie mit Hilfe des Unterraumkriteriums:

$$U + W = \{u + w \mid u \in U \text{ und } w \in W\}$$

ist ein Untervektorraum von V.

(b) Geben Sie die Dimensionsformel für $U + W$ an und beweisen Sie diese. Hierzu dürfen Sie, ohne weitere Begründung, den Basisergänzungssatz verwenden.

(c) Geben Sie die Definition der Schreibweise $V = U \oplus W$ an.

(d) Angenommen, es gilt $V = U + W$. Beweisen Sie mit Hilfe der Dimensionsformel: Es gilt $V = U \oplus W$ genau dann, wenn $\dim V = \dim U + \dim W$ ist.

Aufgabe 6 (*12 Punkte*)

(a) Auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^4$ sei wie folgt ein Skalarprodukt definiert:

$$\langle (w_1, x_1, y_1, z_1), (w_2, x_2, y_2, z_2) \rangle = w_1 w_2 + 2x_1 x_2 + 4y_1 y_2 + 8z_1 z_2.$$

Bestimmen Sie mittels des Gram-Schmidt-Verfahrens[1] eine Orthonormalbasis für die lineare Hülle der Vektoren

$$v_1 = (1, 4, 2, -3), \quad v_2 = (-5, 15, 7, -8), \quad v_3 = (-5, 32, -1, -5).$$

(b) Sei V ein euklidischer Vektorraum, mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und zugehöriger Norm $\|\cdot\|$. Zeigen Sie: Für alle $v, w \in V$ gilt

$$2\langle v, w \rangle = \|v + w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2.$$

(c) Für welche der folgenden 'Normabbildungen'

$$\|(x, y, z)\|_1 = \sqrt{x^2 + xy + 2y^2 + yz + 4z^2},$$
$$\|(x, y, z)\|_2 = |x| + |y| + |z|.$$

auf $\mathbb{R}^3$ gibt es jeweils ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ bzw. $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ auf dem Standardvektorraum $\mathbb{R}^3$, das diese als zugeordnete euklidische Norm induziert? Begründen Sie Ihre Anwort.

[1] *Achtung*: Erwartungsgemäß müssen Sie in diesem Aufgabenteil die Grundrechenarten sicher für ganze Zahlen zwischen -812 und 812 beherrschen.