Mathematisches Institut
Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Dr. Benno Kuckuck

Klausur Lineare Algebra I

Wintersemester 2017/2018
06.02.2018

Nachname: ....

Vorname: ....

Matrikelnr: ....

Bitte beachten Sie die folgenden Hinweise:

- Beginnen Sie die Klausur nur nach der allgemeinen Aufforderung.
- Sie dürfen beliebig viele der umseitigen sechs Aufgaben bearbeiten.
- Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
- Beginnen Sie jede neue Aufgabe jeweils auf einem neuen Blatt.
- Begründen Sie all Ihre Aussagen sorgfältig, falls nicht anders verlangt.
- Die Bearbeitungszeit beträgt insgesamt 120 Minuten.
- Geben Sie am Ende die Aufgabenblätter und Ihre jeweiligen Lösungsblätter geordnet ab.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*16 Punkte*)

(a) Markieren Sie für jede Aussage direkt auf diesem Blatt, ob diese wahr (W) oder falsch (F) ist. (Keine schriftlichen Begründungen!)

W	F	
☐	☐	Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$ ist die symmetrische Gruppe $\mathrm{Sym}(n)$ stets nicht abelsch.
☐	☐	Für lineare Abbildungen $\varphi\colon V \to W$ zwischen $\mathbb{Q}$-Vektorräumen und $w \in W$ ist $\{v \in V \mid v\varphi = w\}$ stets ein Untervektorraum von V.
☐	☐	Sei $\varphi\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung. Dann gilt: $\dim \mathrm{Kern}(\varphi) \geq m - n$.
☐	☐	Jede Basis des Vektorraums $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ aller reellen Folgen, die jeweils schließlich konstant 0 sind, ist abzählbar unendlich.
☐	☐	Jede reelle 3×3-Matrix besitzt wenigstens einen reellen Eigenwert.

Bearbeiten Sie Aufgabenteile (b) und (c) auf einem Extrablatt.

(b) Geben Sie, ohne Beweis, die Leibniz-Formel für die Determinante einer $n \times n$-Matrix über einem Körper K an. Definieren Sie dafür insbesondere die benötigte Signumfunktion.

(c) Entscheiden Sie für jede der nachstehenden Aussagen, ob diese wahr oder falsch ist, und geben Sie einen Beweis bzw. ein Gegenbeispiel an.

(i) Seien $\alpha, \beta\colon V \to V$ Endomorphismen eines endlich-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraums. Haben α und β das gleiche charakteristische Polynom über $\mathbb{R}$, so ist α invertierbar genau dann, wenn β invertierbar ist.

(ii) Jeder Endomorphismus des $\mathbb{C}$-Vektorraums $\mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$ aller komplexwertigen Folgen, die jeweils schließlich konstant 0 sind, besitzt wenigstens einen Eigenvektor.

(*Bewertung in Aufgabe 1, Teil* (a)*: pro korrekte Antwort 1 Punkt.*)

Aufgabe 2 (*14 Punkte*) Für $t \in \mathbb{R}$ sei $\varphi_t \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ linear mit

$$(1,0,0)\varphi_t = (0,1,t), \quad (0,1,0)\varphi_t = (0,t,1), \quad (0,0,1)\varphi_t = (1,t,t).$$

(a) Berechnen Sie die Determinante $\det(\varphi_t)$.
Für welche t ist φ_t invertierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Bestimmen Sie für diejenigen t, für die φ_t nicht invertierbar ist, jeweils eine Basis für $\mathrm{Kern}(\varphi_t)$ und für $\mathrm{Bild}(\varphi_t)$, in Abhängigkeit von t.

(c) Bestimmen Sie für diejenigen t, für die φ_t invertierbar ist, die inverse lineare Abbildung φ_t^{-1}, in Abhängigkeit von t.

Aufgabe 3 (*12 Punkte*) Betrachten Sie die lineare Abbildung

$$\alpha \colon \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2, \ (x,y) \mapsto (-x+8y, 2x-y).$$

(a) Bestimmen Sie die Koordinatenmatrix $A = [\alpha]_{\mathfrak{E}}$ bzgl. der Standardbasis $\mathfrak{E} = (e_1, e_2)$ sowie das charakteristische Polynom von α.

(b) Berechnen Sie die Eigenwerte und die Eigenräume des Endomorphismus α, letztere, indem Sie jeweils eine geeignete Basis bestimmen.

(c) Entscheiden Sie, ob α über $\mathbb{Q}$ diagonalisierbar ist, und bestimmen Sie ggf. eine Matrix $T \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$, so dass $T^{-1}AT$ eine Diagonalmatrix ist.

Aufgabe 4 (*12 Punkte*) Betrachten Sie im Standardvektorraum $\mathbb{Q}^5$ die lineare Hülle $U = \langle u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 \rangle$ der Vektoren

$$u_1 = (1,2,0,-2,-1), \quad u_2 = (-1,1,2,0,-2), \quad u_3 = (-2,-1,1,2,0),$$
$$u_4 = (0,-2,-1,1,2), \quad u_5 = (2,0,-2,-1,1).$$

(a) Bestimmen Sie den Rang des Vektorsystems $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$.

(b) Geben Sie eine Basis für den Untervektorraum U sowie eine Ergänzung derselben zu einer Basis von $\mathbb{Q}^5$ an.

(c) Sei $\sigma \colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ derjenige Endomorphismus, der die Standardbasisvektoren $e_1, \ldots, e_5$ wie folgt abbildet: $e_i\sigma = e_{i+1}$ für $1 \le i \le 4$, und $e_5\sigma = e_1$. Finden Sie zu möglichst vielen $d \in \{0, 1, \ldots, 5\}$ einen geeigneten Vektor $v \in \mathbb{R}^5$ mit $\dim\langle v, v\sigma, v\sigma^2, v\sigma^3, v\sigma^4 \rangle = d$.

Aufgabe 5 (*14 Punkte*) Sei $n \in \mathbb{N}$ und K ein Körper. Für $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ bezeichne A^{tr} die zu A transponierte Matrix.

(a) Zeigen Sie: Für alle $A, B \in \mathrm{Mat}_n(K)$ gilt $(AB)^{\mathrm{tr}} = B^{\mathrm{tr}} A^{\mathrm{tr}}$.

(b) Zeigen Sie: $\mathrm{O}(n, K) = \{A \in \mathrm{Mat}_n(K) \mid AA^{\mathrm{tr}} = \mathrm{Id}\}$ ist eine Untergruppe der allgemeinen linearen Gruppe $\mathrm{GL}_n(K)$.

(c) Bestimmen Sie speziell für $n = 2$ und $K = \mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ die Anzahl der Elemente von $\mathrm{O}(2, \mathbb{F}_3)$.

(d) Ist die Gruppe $\mathrm{O}(2, \mathbb{F}_3)$ abelsch? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 6 (*12 Punkte*) Sei V ein euklidischer Vektorraum, mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

(a) Geben Sie die Definition der euklidischen Norm $\|\cdot\|$ auf V an.

(b) Formulieren Sie die Cauchy–Schwarzsche Ungleichung für Vektoren $v, w \in V$ und geben Sie einen Beweis dieser Ungleichung an.

(c) Folgern Sie für $v, w \in V$ die Ungleichung $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$.

Hinweis. Für Teil (b) betrachten Sie zum Beispiel $\|av - w\|$ für $v, w \in V$ und $a \in \mathbb{R}$.