Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Wintersemester 2017–18

Lineare Algebra I – Blatt 14

Optionale Abgabe der Lösungen bis zum 31.01.2018, 10:15 Uhr in den dafür vorgesehenen Kästen. Das Blatt wird nicht mehr besprochen, Abgaben werden jedoch korrigiert und es können durch die Bearbeitung noch Bonuspunkte erzielt werden.

Bitte beachten Sie die allgemeinen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/LAI_WS1718/`.

Aufgabe 14.1 (+4 Punkte)

Bestimmen Sie für die Vektoren

$$v_1 = (1,1,1,1), \quad v_2 = (-1,4,4,-1), \quad v_3 = (4,-2,2,0) \in \mathbb{R}^4$$

mithilfe des Gram-Schmidt-Verfahrens eine Orthonormalbasis der linearen Hülle $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ im Standardvektorraum $\mathbb{R}^4$, ausgestattet mit dem Standardskalarprodukt.

Aufgabe 14.2 (+4 Punkte)

Sei $n \geq 2$, und $V = \mathbb{R}^n$ der Standardvektorraum. Die *Maximumsnorm* ist definiert durch

$$\|\cdot\|_\infty : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \|x\|_\infty = \max\{|x_i| \mid 1 \leq i \leq n\}.$$

(1) Zeigen Sie: $\|\cdot\|_\infty$ ist eine Norm auf V, d.h.

- $\forall x \in V \smallsetminus \{0\} : \|x\|_\infty > 0$,
- $\forall a \in \mathbb{R}\ \forall x \in V : \|ax\|_\infty = |a|\,\|v\|_\infty$ und
- $\forall x, y \in V : \|x+y\|_\infty \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$.

(2) Beweisen Sie: Es gibt *kein* Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf V, welches die Maximumsnorm mittels $\|x\|_\infty = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ für $x \in V$ induziert.

Aufgabe 14.3 (+4 Punkte)

Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum der Dimension $n < \infty$ und $\vartheta : V \to V$ ein Endomorphismus. Weiter sei $\mathcal{B}$ eine geordnete Basis von V und $A = [\vartheta]_\mathcal{B} \in \mathrm{Mat}_n(K)$ die Koordinatenmatrix von ϑ bezüglich $\mathcal{B}$.
Begründen Sie: Eine Matrix $A' \in \mathrm{Mat}_n(K)$ ist genau dann Koordinatenmatrix von ϑ bezüglich einer geeigneten Basis von V, wenn es ein $T \in \mathrm{GL}_n(K)$ mit $A' = T^{-1}AT$ gibt.

Aufgabe 14.4 (+4 Punkte)

Sei K ein Körper. Zeigen oder widerlegen Sie, mit entsprechender Begründung:

(1) Eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$, deren einziger Eigenwert 0 ist, ist bereits die Nullabbildung.

(2) Ein Endomorphismus $\varphi : V \to V$ eines endlich-dimensionalen K-Vektorraums V ist surjektiv genau dann, wenn 0 kein Eigenwert von φ ist.

(3) Sind $\varphi, \psi \in \mathrm{End}_K(V)$ Endomorphismen eines endlich-dimensionalen K-Vektorraums V, und ist $\lambda \in K$ ein Eigenwert von $\varphi\psi$, so ist λ auch ein Eigenwert von $\psi\varphi$.