Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Wintersemester 2017–18

HEINRICH HEINE UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Lineare Algebra I – Blatt 13

Abgabe der Lösungen bis zum 24.01.2018, 10:15 Uhr in den dafür vorgesehenen Kästen

Bitte beachten Sie die allgemeinen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/LAI_WS1718/`.

Aufgabe 13.1 (4 Punkte)

Betrachten Sie die Matrix $A \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{R})$, die wie folgt konkret gegeben ist:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}. \tag{$\star$}$$

(1) Bestimmen Sie die Determinante $\det(A)$ indem Sie A geeignet mit Elementar- und Diagonalmatrizen multiplizieren.

(2) Entscheiden Sie anhand Ihrer Antwort in (1), ob A invertierbar ist, und bestimmen Sie ggf. A^{-1}.

(3) Betrachten Sie nun die Matrix $\overline{A} \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{F}_2)$, die durch die Gleichung $(\star)$, gelesen modulo 2, gegeben ist. Welche Determinante hat $\overline{A}$ und ist $\overline{A}$ invertierbar?

Aufgabe 13.2 (4 Punkte)

Bestimmen Sie mittels Laplace-Entwicklung die Determinanten der Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R}) \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & 2 & 6 \\ 5 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{F}_{13}).$$

Aufgabe 13.3 (4 Punkte)

Sei K ein Körper und seien $B \in \mathrm{Mat}_m(K)$, $C \in \mathrm{Mat}_{m,n}(K)$ und $D \in \mathrm{Mat}_n(K)$.
Zeigen Sie, dass

$$\det \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix} = (\det B)(\det D)\,.$$

Tipp: Verwenden Sie die Leibniz-Formel und überlegen Sie sich, welche Summanden überhaupt einen von Null verschiedenen Beitrag liefern können.

Bitte wenden!

Aufgabe 13.4 (4 Punkte)

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{Q}) .$$

und $\alpha : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^4, v \mapsto vA$, die durch A definierte lineare Abbildung.

(1) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von α bzw. A, und lesen Sie die Eigenwerte von α ab. Was können Sie daraufhin über die Diagonalisierbarkeit von A aussagen?

(2) Berechnen Sie die Eigenräume von α. Was können Sie nun über die Diagonalisierbarkeit von A aussagen?

(3) Geben Sie, wenn möglich, eine Transformationsmatrix $T \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{Q})$ an, die A diagonalisiert, d.h. $T^{-1}AT$ ist eine Diagonalmatrix.