Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Wintersemester 2017–18

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Lineare Algebra I – Blatt 12

Abgabe der Lösungen bis zum 17.01.2018, 10:15 Uhr in den dafür vorgesehenen Kästen

Bitte beachten Sie die allgemeinen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/LAI_WS1718/`.

Durchweg auf dem gesamten Übungsblatt bezeichne K einen Körper.
Folgende Notation findet zusätzlich Verwendung. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir spezielle Matrizen in $\mathrm{Mat}_n(K)$. Für $i, j \in \{1, \dots, n\}$ mit $i \neq j$ und $a \in K$ bezeichne $E_{ij}(a) \in \mathrm{Mat}_n(K)$ die Matrix, die sich von der Einheitsmatrix dadurch unterscheide, dass sie an der Stelle (i, j) den Eintrag a habe. Solche Matrizen heißen *Elementarmatrizen*. Ferner bezeichne $T_{ij} \in \mathrm{Mat}_n(K)$ die Matrix, welche sich von der Einheitsmatrix dadurch unterscheide, dass an den Stellen $(i, i), (j, j)$ Einträge 0 und an den Stellen $(i, j), (j, i)$ Einträge 1 stehen. Schließlich, für $i \in \{1, \dots, n\}$ und $a \in K^\times$, bezeichne $D_i(a)$ die Matrix, welche sich von der Einheitsmatrix dadurch unterscheide, dass an der Stelle (i, i) der Eintrag a stehe.

Aufgabe 12.1 (4 Punkte)

Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}(K)$.

(1) Erläutern Sie, wie sich elementare Zeilen- und Spaltenumformungen mit Hilfe der Multiplikation von A mit Matrizen der Form $E_{ij}(a)$, T_{ij}, $D_i(a)$ aus $\mathrm{Mat}_m(K)$ bzw. $\mathrm{Mat}_n(K)$ ausdrücken lassen.

(2) Zeigen Sie: Die $n \times n$ Matrizen $E_{ij}(a)$ für $i \neq j$ und $a \in K$, T_{ij} für $i \neq j$ und $D_i(a)$ für $a \in K^\times$ sind invertierbar, d.h. Elemente der allgemeinen linearen Gruppe $\mathrm{GL}_n(K)$.

(3) Die Teilmenge $\mathrm{SL}_n(K) \subseteq \mathrm{GL}_n(K)$, welche aus allen endlichen Produkten $E_1 E_2 \cdots E_r$ ($r \in \mathbb{N}_0$) von beliebigen Elementarmatrizen $E_1, \dots, E_r \in \mathrm{GL}_n(K)$ besteht, bildet eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_n(K)$.

Bemerkung. Die Gruppe $\mathrm{SL}_n(K)$ heißt die *spezielle lineare Gruppe* vom Grad n über K.

Aufgabe 12.2 (4 Punkte)

Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}(K)$ hat *Zeilenstufenform*, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(ZSF1) Ist eine Zeile von A von Null verschieden, so ist der erste von 0 verschiedene Eintrag in dieser Zeile gleich 1. Die Position dieses Eintrags heißt dann *Angelpunkt* der Zeile.

(ZSF2) Von Null verschiedene Zeilen liegen allesamt oberhalb von Nullzeilen. Sind die $i$te und $j$te Zeile von Null verschieden und $i < j$, dann erscheint der Angelpunkt der $j$ten Zeile in einer Spalte rechts von der des Angelpunktes der $i$ten Zeile.

Bitte wenden!

Die Matrix A befindet sich in *reduzierter Zeilenstufenform*, falls zusätzlich gilt:

(ZSF3) Alle Einträge einer Spalte, in der ein Angelpunkt liegt, sind bis auf den Eintrag 1 im Angelpunkt selbst gleich 0.

(1) Zeigen Sie per Induktion nach m: Jede Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}(K)$ lässt sich durch eine geeignete Anwendung von Zeilenumformungen in eine Matrix A' überführen, die reduzierte Zeilenstufenform besitzt.

(2) Folgern Sie mit Hilfe von Aufgabe 12.1: Zu jeder Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}(K)$ gibt es ein $B \in \mathrm{GL}_m(K)$, so dass BA reduzierte Zeilenstufenform besitzt.

Aufgabe 12.3 (4 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$. Erläutern Sie, warum folgendes Verfahren zur Überprüfung der Invertierbarkeit von A und ggf. zu der Bestimmung der inversen Matrix A^{-1} führt.

Man modifiziere A durch Hintereinanderausführung elementarer Zeilenumformungen, mit dem Ziel, A in die Einheitsmatrix zu transformieren. Entsteht dabei eine Nullzeile, so ist A nicht invertierbar. Erreicht man die Einheitsmatrix, so ist A invertierbar und die gleichen Zeilenumformungen in derselben Reihenfolge angewandt auf die Einheitsmatrix liefern die inverse Matrix A^{-1}.

Aufgabe 12.4 (4 Punkte)

Wenden Sie das in Aufgabe 12.3 beschriebene Verfahren auf die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{Q})$$

an, um zu zeigen, dass A invertierbar ist und um die inverse Matrix zu berechnen.

Zusatzfrage. Fassen Sie A nun als Matrix $\overline{A}$ über dem endlichen Körper $\mathbb{F}_p$ für eine Primzahl p auf. Für welche $p \in \mathbb{P}$ ist $\overline{A}$ invertierbar in $\mathrm{Mat}_3(\mathbb{F}_p)$?