Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Wintersemester 2017–18

HEINRICH HEINE UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Lineare Algebra I – Blatt 11

Abgabe der Lösungen bis zum 10.01.2018, 10:15 Uhr in den dafür vorgesehenen Kästen

Bitte beachten Sie auch die allgemeinen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/LAI_WS1314/`.

Aufgabe 11.1 (4 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$, und $V = K^n$ der Standardvektorraum über einem Körper K. Zeigen Sie:

(1) Für alle $v, w \in V$ gilt: $v \cdot w = w \cdot v$, insbesondere also: $v \perp w \Leftrightarrow w \perp v$.

(2) Für alle $a \in K$ und $u, v, w \in V$ gilt: $(au + v) \cdot w = a(u \cdot w) + (v \cdot w)$.

(3) Für $M \subseteq N \subseteq V$ gilt $M^\perp \supseteq N^\perp$.

(4) Für jedes $M \subseteq V$ ist $M^\perp$ ein Unterraum von V.

(5) Für jedes $M \subseteq V$ gilt $M^\perp = \langle M \rangle^\perp$.

Aufgabe 11.2 (4 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$, und $V = K^n$ der Standardvektorraum über einem Körper K. Sei U ein k-dimensionaler Unterraum von V, mit einer Basis, die bezüglich der Standardbasis $e_1, \ldots, e_n$ von V die Koordinatenmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & a_{1,k+1} & a_{1,k+2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & a_{2,k+1} & a_{1,k+2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{k,k+1} & a_{k,k+2} & \cdots & a_{k,n} \end{pmatrix}$$

mit k Zeilen, n Spalten und gewissen Einträgen $a_{ij} \in K$ habe. Zeigen Sie: Dann ist $U^\perp$ ein $(n-k)$-dimensionaler Unterraum von V, mit einer Basis, die bezüglich $e_1, \ldots, e_n$ die Koordinatenmatrix

$$\begin{pmatrix} -a_{1,k+1} & -a_{2,k+1} & \cdots & -a_{k,k+1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{1,k+2} & -a_{2,k+2} & \cdots & -a_{k,k+2} & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -a_{1,n} & -a_{2,n} & \cdots & -a_{k,n} & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit $n - k$ Zeilen und n Spalten besitzt.

Hinweis. Verwenden Sie an geeigneter Stelle Teil (4) von Aufgabe 11.1.

Bitte wenden!

Aufgabe 11.3 (4 Punkte)

(1) Entscheiden und begründen Sie, welche der folgenden Abbildungen linear sind:

(a) $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y,z) \mapsto (x+z, y+1)$,

(b) $\varphi\colon \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2$, $(x,y) \mapsto (y^2, x)$,

(c) $\varphi\colon \mathbb{F}_2^{\mathbb{N}} \to \mathbb{F}_2^{\mathbb{N}}$, $(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \mapsto (a_{2i})_{i\in\mathbb{N}}$. (Erinnerung: $\mathbb{F}_2^{\mathbb{N}}$ ist der Folgenraum über $\mathbb{F}_2$.)

(2) Geben Sie die Koordinatenmatrix $T = [\vartheta]_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ für die lineare Abbildung

$$\vartheta\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, \quad (x,y,z) \mapsto (x-y, y-z, x, z+x)$$

bezüglich der Standardbasen $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ an.
Bestimmen Sie $\operatorname{Kern}(\vartheta)$ und $\operatorname{Bild}(\vartheta)$, indem Sie jeweils eine Basis berechnen.

Aufgabe 11.4 (4 Punkte)

Betrachte die reellen Vektorräume $V = \mathbb{R}^2$ und $W = \mathbb{R}^3$ mit Standardbasen $\mathcal{E} = (e_1, e_2)$ bzw. $\mathcal{F} = (f_1, f_2, f_3)$ und weiteren Basen $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ bzw. $\mathcal{C} = (w_1, w_2, w_3)$, wobei

$$\begin{aligned} v_1 &= e_1 - e_2, & v_2 &= -2e_1 + e_2, & & \\ w_1 &= f_1 - f_3, & w_2 &= f_2 + f_3, & w_3 &= f_3. \end{aligned}$$

Sei $\vartheta \in \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ mit $v_1\vartheta = w_1$ und $v_2\vartheta = w_2$. D.h. die Koordinatenmatrix von ϑ bzgl. der Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ erfülle

$$[\vartheta]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Koordinatenmatrix $[\vartheta]_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ von ϑ bzgl. der Basen $\mathcal{E}$ und $\mathcal{F}$. Geben Sie zusätzlich invertierbare Übergangsmatrizen P und Q an, so dass gilt: $P[\vartheta]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}Q = [\vartheta]_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$.

Weihnachtsrätsel. Aus einem mathematischen Seminar im hohen Norden (Kiel) ist durch viele Generationen hindurch folgendes Rätsel überliefert worden. Viel Spass dabei!

Hier ist ein Weihnachtsrätsel, mit dem sich die ganze Familie beschäftigen kann, wenn über die Feiertage mal Langeweile aufkommen sollte.
Es geht darum, herauszufinden, in welchem Stall das Christkind geboren wurde. Fünf Ställe liegen in einer Reihe entlang der Straße. Jeder von diesen trägt eine andere Farbe. In jedem Stall wohnt ein anderer Hirte aus einer anderen Landschaft Palästinas. Jeder Stallhirte bevorzugt ein bestimmtes Getränk, benutzt ein bestimmtes Gewürz und hält ein bestimmtes Haustier. Keiner der Hirten trinkt das gleiche Getränk, würzt mit demselben Gewürz oder hält das gleiche Tier wie ein anderer Hirte. Himmlische Botschafter haben die folgenden Hinweise vergeben:

1. Das Christkind ist in dem Stall geboren, in dem ein Esel gehalten wird.
2. Der galiläische Hirte lebt in einem roten Stall.
3. Der samaritische Hirte hält einen Hund.
4. Der judäische Hirte trinkt gerne Tee.
5. Der grüne Stall liegt, von der Straße gesehen, links neben dem weißen Stall.
6. Der Hirte des grünen Stalles trinkt Fruchtnektar.
7. Der Hirte, der mit Nelken würzt, hält einen Vogel.
8. Der Hirte, der im mittleren Stall wohnt, trinkt Milch.
9. Der Hirte des gelben Stalles würzt mit Pfeffer.
10. Der ituräische Hirte wohnt im ersten Stall von links.
11. Der Hirte, der mit Koriander würzt, wohnt neben dem, der eine Katze hält.
12. Der Hirte, der ein Kamel hält, wohnt neben dem, der mit Pfeffer würzt.
13. Der mit Zimt würzt trinkt gerne Wein.
14. Der ituräische Hirte wohnt neben dem blauen Stall.
15. Der peräische Hirte würzt mit Safran.
16. Der mit Koriander würzt hat einen Nachbarn, der Wasser trinkt.

Also, in welchem Stall wurde das Christkind geboren?

Frohe Weihnachten und kommen Sie gut ins neue Jahr!