Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Wintersemester 2017–18

Lineare Algebra I – Blatt 9

Abgabe der Lösungen bis zum 13.12.2017, 10:15 Uhr in den dafür vorgesehenen Kästen

Bitte beachten Sie die allgemeinen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/LAI_WS1718/`.

Aufgabe 9.1 (4 Punkte)

Verifizieren Sie mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus, dass 261 und 2018 teilerfremd sind, und berechnen Sie das multiplikativ Inverse von 261 modulo 2018 (als Element von $\{0, 1, \dots, 2017\}$).

Aufgabe 9.2 (4 Punkte)

Seien R, S Ringe.

(1) Zeigen Sie, dass $R \times S$ mit den koordinatenweise definierten Verknüpfungen

$$\begin{aligned} +\colon (R \times S) \times (R \times S) &\to R \times S, \quad (r_1, s_1) + (r_2, s_2) = (r_1 + r_2, s_1 + s_2), \\ \cdot\colon (R \times S) \times (R \times S) &\to R \times S, \quad (r_1, s_1)(r_2, s_2) = (r_1 r_2, s_1 s_2) \end{aligned}$$

einen Ring bildet.

(2) Zeigen Sie: $R \times S$ ist kommutativ genau dann, wenn R und S beide kommutativ sind.

Sei zusätzlich $R \neq \{0\}$ und $S \neq \{0\}$ vorausgesetzt.

(3) Zeigen Sie: $R \times S$ besitzt ein Einselement genau dann, wenn R und S beide ein Einselement haben.

(4) Kann $R \times S$ jemals ein Körper sein?

Aufgabe 9.3 (4 Punkte)

Überprüfen Sie die folgenden Relationen $\varrho \subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ auf Reflexivität (bzgl. $\mathbb{N}_0$), Symmetrie und Transitivität:

(a) $\varrho = \{(m, n) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \mid m + n = 2\}$,

(b) $\varrho = \{(m, n) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \mid m \text{ und } n \text{ sind durch 5 teilbar}\}$,

(c) $\varrho = \{(m, n) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \mid m = n \text{ oder } (m, n) = (2, 3)\}$.

Bitte wenden!

Aufgabe 9.4 (4 Punkte)

Sei G eine Gruppe. Eine *Untergruppe* von G ist eine Teilmenge $H \subseteq G$, die bezüglich der eingeschränkten Multiplikation selbst eine Gruppe bildet.

(1) Sei $H \subseteq G$. Beweisen Sie das folgende Untergruppenkriterium: H ist genau dann eine Untergruppe von G, wenn gilt: $H \neq \varnothing$ und $\forall x, y \in H : x^{-1}y \in H$.

Im folgenden sei $H \subseteq G$ eine Untergruppe.

(2) Zeigen Sie, dass die auf G durch

$$x \equiv_H y \quad \longleftrightarrow \quad x^{-1}y \in H \qquad (x, y \in G)$$

definierte Relation eine Äquivalenzrelation darstellt. Zeigen Sie weiter, dass die Äquivalenzklasse von $g \in G$ bezüglich $\equiv_H$ gleich $gH = \{gh \mid h \in H\}$ ist.

(3) Zeigen Sie, dass $\mu_g : H \to gH$, $h \mapsto gh$ für jedes $g \in G$ eine Bijektion darstellt.

(4) Folgern Sie für $|G| < \infty$ den Satz von Lagrange: $|H|$ teilt $|G|$.