Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Wintersemester 2017–18

HEINRICH HEINE UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Lineare Algebra I – Blatt 8

Abgabe der Lösungen bis zum 06.12.2017, 10:15 Uhr in den dafür vorgesehenen Kästen

---

Bitte beachten Sie die allgemeinen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/LAI_WS1718/`.

Aufgabe 8.1 (4 Punkte)

Berechnen Sie den Zeilenrang der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & -1 & 9 \\ -2 & 6 & -6 & 16 & 24 \\ -3 & 9 & -6 & -6 & -3 \\ 3 & -9 & 4 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

unter Verwendung der in der Vorlesung beschriebenen Methode (siehe 9.7), und zwar

(1) über dem Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen und

(2) über dem endlichen Körper $R_{17}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/17\mathbb{Z}$ (siehe 4.5, 4.6, 11.5(c)).

Aufgabe 8.2 (4 Punkte)

Sei K ein Körper. Seien $m, n \in \mathbb{N}$, und $a_{ij}, b_i \in K$ für $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$. Wir betrachten das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \qquad (*)$$

und definieren dazu Spaltenvektoren $v_1, \dots, v_n$ und b wie folgt:

$$v_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} \in K^m \text{ für } i \in \{1, \dots, n\} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in K^m.$$

Beweisen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) Das Gleichungssystem $(*)$ ist lösbar.

(ii) $\mathrm{Rang}(v_1, \dots, v_n) = \mathrm{Rang}(v_1, \dots, v_n, b)$.

(iii) $b \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle$.

Hinweis. Es genügt, zu zeigen: (i) $\Leftrightarrow$ (iii), (iii) $\Rightarrow$ (ii) und (ii) $\Rightarrow$ (iii).

Bitte wenden!

Aufgabe 8.3 (4 Punkte)

Betrachten Sie die Unterräume

$$U = \langle (1,0,2,-1), (0,1,3,1) \rangle,$$
$$W = \langle (1,1,-1,2), (0,1,9,-1) \rangle$$

des reellen Standardvektorraums $\mathbb{R}^4$. Bestimmen Sie Basen für $U + W$ und $U \cap W$.

Aufgabe 8.4 (4 Punkte)

Ein Boolescher Ring ist ein Ring R mit 1, in dem $a^2 = a$ für alle $a \in R$ gilt.

(1) Zeigen Sie, dass für alle $a \in R$ gilt: $a + a = 0$.

(2) Zeigen Sie, dass R kommutativ ist.

(3) Zeigen Sie, dass jedes Element von $R \setminus \{1\}$ ein Nullteiler ist.