Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Wintersemester 2017–18

Lineare Algebra I – Blatt 7

Abgabe der Lösungen bis zum 29.11.2017, 10:15 Uhr in den dafür vorgesehenen Kästen

Bitte beachten Sie die allgemeinen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/LAI_WS1718/`.

Aufgabe 7.1 (4 Punkte)

Die Teilmenge $M = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ des $\mathbb{Q}$-Vektorraums $\mathbb{Q}^3$ bestehe aus den Vektoren

$$v_1 = (1,2,0), \quad v_2 = (0,1,3), \quad v_3 = (1,0,0), \quad v_4 = (2,5,1).$$

(1) Zeigen Sie, dass M eine linear abhängige Teilmenge von $\mathbb{Q}^3$ ist.

(2) Zeigen Sie, dass M ein Erzeugendensystem von $\mathbb{Q}^3$ ist.

(3) Bestimmen Sie eine Teilmenge von M, die eine Basis von $\mathbb{Q}^3$ ist.

Aufgabe 7.2 (4 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$. Wie üblich bezeichnen wir mit

$$e_1 = (1,0,\dots,0), \quad e_2 = (0,1,0,\dots,0), \quad \dots, \quad e_n = (0,\dots,0,1)$$

die Standardeinheitsvektoren in dem reellen Vektorraum $\mathbb{R}^n$. Gegeben seien zwei Indexmengen $I_1, I_2 \subseteq \{1,2,\dots,n\}$. Wir betrachten die Untervektorräume

$$W_1 = \langle\{e_i \mid i \in I_1\}\rangle \quad \text{und} \quad W_2 = \langle\{e_i \mid i \in I_2\}\rangle.$$

Finden Sie $W_1 \cap W_2$ und $W_1 + W_2$, indem Sie für beide Räume jeweils eine Basis in Abhängigkeit von I_1, I_2 bestimmen.

Aufgabe 7.3 (4 Punkte)

Sei V ein Vektorraum über einem Körper K. Sei weiter $\{v_1, \dots, v_n\}$ ein endliches Erzeugendensystem von V, und sei

$$I = \big\{ i \in \{1,\dots,n\} \mid v_i \notin \langle v_1, \dots, v_{i-1}\rangle \big\}.$$

Zeigen Sie, dass $\{v_i \mid i \in I\}$ eine Basis von V ist.

Hinweis. Orientieren Sie sich am Beweis von Satz 8.6 (ohne allerdings die Aussagen, die dort gezeigt werden, direkt zu verwenden).

Aufgabe 7.4 (4 Punkte)

Sei $M = \{\log p \mid p \text{ Primzahl}\}$. Entscheiden Sie, ob M eine linear abhängige oder linear unabhängige Teilmenge des $\mathbb{Q}$-Vektorraumes $\mathbb{R}$ ist.

Bemerkung. Hierbei bezeichnet $\log\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ die natürliche Logarithmusfunktion, d.h. die Umkehrabbildung von der Exponentialfunktion $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$, $x \mapsto \exp(x) = e^x$.