Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Wintersemester 2017–18

Lineare Algebra I – Blatt 5

Abgabe der schriftlichen Lösungen zu den vier Aufgaben bis zum 15.11.2017, 10:15 Uhr in den dafür vorgesehenen Kästen.

Bitte beachten Sie die allgemeinen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/LAI_WS1718/`.

Aufgabe 5.1 (4 Punkte)

Betrachten Sie die folgenden Vektoren des reellen Standardvektorraums $V = \mathbb{R}^4$:

$$v_1 = (1,1,1,1),\ v_2 = (4,4,0,0),\ v_3 = (3,4,2,1),\ v_4 = (2,3,1,1),\ v_5 = (1,0,0,0).$$

(1) Stellen Sie einen der Vektoren $v_1, \dots, v_5$ als Linearkombination von drei anderen dar. Zeigen Sie andererseits, dass sich einer der Vektoren $v_1, \dots, v_5$ nicht als Linearkombination der anderen darstellen lässt.

(2) Zeigen Sie, dass $\langle v_1 \rangle \cup \langle v_2 \rangle$ kein Unterraum von V ist, wohingegen $\langle v_1, v_4, v_5 \rangle \cup \langle v_2 \rangle$ ein Unterraum von V ist.

Aufgabe 5.2 (4 Punkte)

Sei V ein Vektorraum über einem Körper K, und seien W_1, W_2 Unterräume von V. Zeigen Sie: $W_1 \cup W_2$ ist ein Unterraum von V genau dann, wenn $W_1 \subseteq W_2$ oder $W_2 \subseteq W_1$ gilt.

Aufgabe 5.3 (4 Punkte)

(1) Zeigen Sie, dass sich jeder Vektor $b = (b_1, b_2, b_3)$ des Standardvektorraumes $\mathbb{Q}^3$ als Linearkombination der Vektoren $(2,0,4)$, $(5,0,3)$, $(1,6,0)$ darstellen lässt.

(2) Man betrachte $\mathbb{R}$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum. Zeigen Sie, dass sich in diesem Vektorraum $\sqrt{3}$ nicht als Linearkombination der Elemente 1, $\sqrt{2}$ darstellen lässt.

Aufgabe 5.4 (4 Punkte)

Sei $V = \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$.
Zeigen Sie, dass die folgenden Mengen Unterräume von V bilden:

$$U = \{f \in V \mid f(x) = f(-x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\},$$
$$W = \{g \in V \mid g(x) = -g(-x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\}.$$

Zeigen Sie ferner: $U \cap W = \{0\}$ und $U + W = V$.

Hinweis. Zu einer Abbildung $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ betrachten Sie die folgenden Abbildungen

$$h_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \tfrac{h(x)+h(-x)}{2} \quad \text{und} \quad h_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \tfrac{h(x)-h(-x)}{2}.$$