Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Wintersemester 2017–18

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Lineare Algebra I – Blatt 4

Abgabe der schriftlichen Lösungen zu den vier Aufgaben bis zum 08.11.2017, 10:15 Uhr in den dafür vorgesehenen Kästen.

Bitte beachten Sie auch die allgemeinen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/LAI_WS1718/`.

Aufgabe 4.1 (4 Punkte)

Seien A, B endliche Mengen. Beweisen Sie, dass $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ gilt.

Hinweis. Begründen Sie die Formel zunächst in dem Fall $A \cap B = \varnothing$, indem Sie wie von der Definition gefordert eine geeignete Bijektion direkt angeben.

Aufgabe 4.2 (4 Punkte)

Bestimmen Sie geeignete Additions- und Multiplikationstafeln für endliche Körper $\mathbb{F}_3$, $\mathbb{F}_4$ und $\mathbb{F}_5$ mit drei, vier bzw. fünf Elementen.

Freiwilliger Zusatz. Sei $K = \{0, 1, a, b\}$ ein Körper mit 4 Elementen. Erläutern Sie, wie die Abbildungen $\alpha_m: K \times K \to K$, $(x, y) \mapsto mx + y$ für $m \in \{1, a, b\}$ Lösungen für das in der Vorlesung vorgestellte Kartenspielpuzzle produzieren.
Das Stichwort für eine allgemeinere Problemstellung, die von Euler (1707-1783) untersucht wurde, ist: *griechisch-lateinisches Quadrat.*

Aufgabe 4.3 (4 Punkte)

Sein $m \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(1) Zu jedem $a \in \mathbb{Z}$ existieren eindeutig bestimmte $q, r \in \mathbb{Z}$ mit $a = qm + r$ und $0 \leq r < m$.

(2) Ist m keine Primzahl, so bildet die Struktur $R_m(\mathbb{Z}) = (\{0, 1, \dots, m-1\}, +_m, \cdot_m)$ der „ganzen Zahlen modulo m“ keinen Körper.

Hinweis. Aussage (1) ist Ihnen als *Division mit Rest* vertraut. Verwenden Sie für den Nachweis der Existenz die „Methode des kleinsten Verbrechers“, angewandt auf $|a| \in \mathbb{N}_0$.

Aufgabe 4.4 (4 Punkte)

Eine reelle Folge ist eine Abbildung $x: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$; gewöhnlich notiert man sie als $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, wobei $x_n = x(n)$ gilt. Die Folge x heißt beschränkt, falls gilt: $\exists B \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N} : |x_n| \leq B$. Die Folge x heißt eine Nullfolge, falls gilt: $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}_{\geq n_0} : |x_n| < \varepsilon$.
Zeigen Sie, dass

$$U_1 = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid x \text{ ist beschränkt}\} \quad \text{und} \quad U_2 = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid x \text{ ist eine Nullfolge}\}$$

Untervektorräume des Vektorraums $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ über $\mathbb{R}$ sind.

Bemerkung. Der Raum U_1 spielt eine grundlegende Rolle in der Funktionalanalysis; ausgestattet mit der sogenannten Supremumsnorm wird er gewöhnlich mit ℓ^∞ bezeichnet. Der Raum U_2, mit der Supremumsnorm, wird oftmals mit c_0 bezeichnet.