Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Wintersemester 2017–18

Lineare Algebra I – Blatt 3

Abgabe der schriftlichen Lösungen zu Aufgaben 3.1, 3.2 und 3.3 bis zum 02.11.2017, 10:15 Uhr in den dafür vorgesehenen Kästen; Aufgabe 3.4 bereiten Sie bitte geeignet vor.

Bitte beachten Sie auch die allgemeinen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/LAI_WS1718/`.

Aufgabe 3.1 (4 Punkte)

Sei $\alpha\colon A \to A$ eine Abbildung von einer endlichen Menge A in sich. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(1) α ist injektiv,

(2) α ist surjektiv auf A.

Geben Sie Abbildungen von $\mathbb{N}$ in sich an, die zeigen, dass sich keine der beiden Implikationen für unendliche Mengen 'retten' läßt.

Aufgabe 3.2 (4 Punkte)

Sei A eine Menge, und sei $\mathrm{Sym}(A) = \{\alpha \mid \alpha\colon A \to A \text{ bijektiv}\}$.

(i) Sei $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ mit $n \in \mathbb{N}$. Geben Sie für $n \in \{1, 2\}$ die Elemente von $\mathrm{Abb}(A, A)$ und für $n \in \{1, 2, 3\}$ die Elemente von $\mathrm{Sym}(A)$ direkt über Abbildungstafeln an.

(ii) Zeigen Sie: Sind $\alpha, \beta \in \mathrm{Sym}(A)$, so ist auch $\alpha\beta \in \mathrm{Sym}(A)$.

(iii) Finden Sie für $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ mit $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ Elemente $\alpha, \beta \in \mathrm{Sym}(A)$ mit $\alpha\beta \neq \beta\alpha$.

Bemerkung. Bijektionen von einer Menge A auf sich nennt man *Permutationen* von A. Die Bezeichnung $\mathrm{Sym}(A)$ steht für *symmetrische Gruppe*.

Aufgabe 3.3 (4 Punkte)

Sei A eine Menge. Zeigen Sie: Die Abbildung

$$\mathcal{P}(A) \to \mathrm{Abb}(A, \{0, 1\}), \quad T \mapsto \iota_T,$$

wobei

$$\iota_T\colon A \to \{0, 1\}, \quad a \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } a \notin T, \\ 1 & \text{falls } a \in T \end{cases}$$

die Indikatorfunktion von $T \subseteq A$ bezeichnet, liefert eine Bijektion von der Potenzmenge von A auf die Menge $\mathrm{Abb}(A, \{0, 1\})$ aller Abbildungen von A nach $\{0, 1\}$.

Aufgabe 3.4

Seien X eine Menge und $\mathcal{P}(X)$ ihre Potenzmenge. Die *symmetrische Differenz* von $A, B \subseteq X$ ist die Menge $A \vartriangle B = (A \cup B) \smallsetminus (A \cap B)$. Zeigen Sie für $A, B, C \in \mathcal{P}(X)$:

(i) $A \vartriangle (B \vartriangle C) = (A \vartriangle B) \vartriangle C$,

(ii) $A \vartriangle B = B \vartriangle A$,

(iii) $A \vartriangle \varnothing = A$,

(iv) $A \vartriangle A = \varnothing$.