Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Wintersemester 2017–18

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

# Lineare Algebra I – Blatt 2

Abgabe der schriftlichen Lösungen zu Aufgaben 2.1, 2.2 und 2.3 bis zum 25.10.2017, 10:15 Uhr in den dafür vorgesehenen Kästen; die übrigen Aufgaben bereiten Sie bitte für die Übungsstunde geeignet vor, so daß Sie sich entsprechend beteiligen können.

Bitte beachten Sie auch die allgemeinen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/LAI_WS1718/`.

Verwenden Sie insbesondere das dort bereitgestellte Deckblatt.

**Aufgabe 2.1** (4 Punkte)

Seien $A$, $B$ Mengen, und $\mathcal{P}(A)$, $\mathcal{P}(B)$ ihre Potenzmengen. Beweisen Sie:

(i) $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$,

(ii) $\mathcal{P}(A \cup B) \supseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.

Wann gilt in (ii) Gleichheit?

**Aufgabe 2.2** (4 Punkte)

Seien $a, b, a', b'$ Mengen. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(1) $\big\{\{a,b\},\{a\}\big\} = \big\{\{a',b'\},\{a'\}\big\}$,

(2) $a = a'$ und $b = b'$.

*Bemerkung.* Die Definition $(a,b) = \{\{a,b\},\{a\}\}$ liefert also eine explizite mengentheoretische Konstruktion für geordnete Paare: $(a,b)$ ist eindeutig durch seine Koordinaten bestimmt. Diese Darstellung geht auf Kuratowski (1896–1980) zurück.

**Aufgabe 2.3** (4 Punkte)

Beweisen Sie, dass es unendlich viele Primzahlen $p$ gibt, die bei Division mit 4 den Rest 3 lassen. (Die ersten fünf solche Primzahlen sind also 3, 7, 11, 19, 23.)

*Hinweis.* Beobachten Sie, dass eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ bei Division mit 4 genau dann den Rest 3 läßt, wenn $n$ von der Form $4k+3$ mit $k \in \mathbb{N}_0$ ist. Wandeln Sie nun den (z.B. aus der Vorlesung) bekannten Beweis von Euklid für die Unendlichkeit der Primzahlmenge geeignet ab: Betrachten Sie zu endlichen vielen Primzahlen $p_1, \ldots, p_r$, die jeweils bei Division mit 4 den Rest 3 lassen, einen geeigneten Primteiler von $n = 4\prod_{i=1}^{r} p_i - 1$.

**Aufgabe 2.4**

Bestimmen Sie die Potenzmenge von $\{1,2,3,4\}$ und zeichnen Sie ein zugehöriges Hasse-Diagramm.

**Aufgabe 2.5**

Jedes Viereck $ABCD$ hat bekanntlich zwei Diagonalen: die Verbindungsstrecken $AC$ und $BD$. Ermitteln Sie allgemeiner, für beliebiges $n \geq 3$, die Anzahl $d_n$ der Diagonalen (d.h. Verbindungsstrecken zwischen zwei nicht benachbarten Ecken) in einem ebenen $n$-Eck. Begründen Sie die von Ihnen gefundene Formel.