Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Wintersemester 2017–18

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Lineare Algebra I – Blatt 1

Abgabe der schriftlichen Lösungen zu Aufgaben 1.1, 1.2 und 1.3 bis zum 18.10.2017, 10:15 Uhr in den dafür vorgesehenen Kästen; die übrigen Aufgaben bereiten Sie bitte für die Übungsstunde geeignet vor, so daß Sie sich entsprechend beteiligen können.

Bitte beachten Sie auch die allgemeinen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/LAI_WS1718/`.

Verwenden Sie insbesondere das dort bereitgestellte Deckblatt.

Aufgabe 1.1 (4 Punkte)

Seien A und B Mengen. Zeigen Sie: $A = B$ genau dann, wenn $A \cup B = A \cap B$.

Aufgabe 1.2 (4 Punkte)

Zeigen Sie, etwa durch Angabe und Erläuterung eines konkreten Gegenbeispiels, daß für Mengen A, B, C, D im allgemeinen *nicht* gilt:

$$(A \cup B) \cap (C \cup D) \subseteq (A \cap B) \cup (C \cap D) \quad \text{oder} \quad (A \cup B) \cap (C \cup D) \supseteq (A \cap B) \cup (C \cap D).$$

Aufgabe 1.3 (4 Punkte)

Bestimmen Sie alle rationalen Lösungen des linearen Gleichungssystems

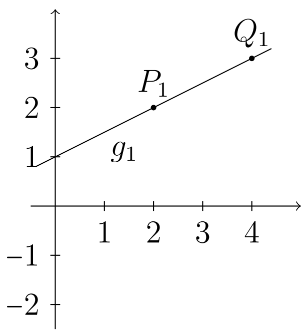
$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 6 \qquad (1)\\ 2x - y + 4z &= 2 \qquad (2)\\ 4x + 3y - 2z &= 14, \qquad (3) \end{aligned}$$

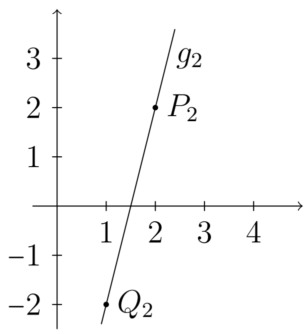
d. h., geben Sie, ggf. durch eine geeignete Parametrisierung, die Menge aller rationalen Zahlentripel $(x, y, z) \in \mathbb{Q}^3$ an, für die die drei angegebenen Gleichungen simultan gelten.

In den folgenden Aufgaben betrachten wir Geraden in der euklidischen Ebene.

Aufgabe 1.4

Bestimmen Sie die Steigungen der unten dargestellten Geraden g_1 und g_2.





Bitte wenden!

Aufgabe 1.5

Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden h durch die Punkte $P = (-1,3)$ und $Q = (5,-2)$. Liegt der Punkt $R = (3,0)$ ebenfalls auf h? Falls nicht, wie würden Sie eine Gerade h' ermitteln, die möglichst dicht an den drei Punkten P, Q, R liegt?

Aufgabe 1.6

Bestimmen Sie den Schnitt der durch die folgenden Gleichungen gegebenen Geraden

$$y = \tfrac{1}{2}x + 1, \qquad x = cy + 1$$

in Abhängigkeit von dem Parameter c.
Was können Sie qualitativ ganz allgemein über den Schnitt (i) zweier Geraden in der euklidischen Ebene, (ii) einer Geraden mit einer Ebene im 3-dimensionalen euklidischen Raum, (iii) zweier Ebenen im 3-dimensionalen euklidischen Raum sagen?

Aufgabe 1.7

Betrachten Sie das ebene Dreieck ABC mit Eckpunkten $A = (1,4)$, $B = (5,0)$, $C = (7,3)$. Berechnen Sie den Mittelpunkt (‘Schwerpunkt’) sowie die Fläche des Dreiecks ABC.

Aufgabe 1.8

Seien $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Q}$. Zeigen Sie, daß das lineare Gleichungssystem

$$ax + by = e \qquad (*)$$
$$cx + dy = f, \qquad (**)$$

falls $\delta(a,b,c,d) = ad - bc \neq 0$, genau eine Lösung hat, indem Sie diese eindeutig bestimmen.

Zum Schluß und zum Spaß eine Knobelaufgabe…

Aufgabe 1.9

Gegeben sei ein Schachbrett, also ein regelmäßig in 8×8 kleinere quadratische Felder unterteiltes quadratisches Brett, dessen Felder abwechselnd weiß und schwarz gefärbt sind. Gegeben seien ferner 32 Dominosteine, die rechteckig seien und genau die Größe zweier aneinandergrenzender Feldern dieses Schachbretts haben. Nun ist es sicherlich möglich, die 64 Felder des Schachbretts mit den 32 Dominosteinen komplett zu überdecken, ohne daß ein Stein irgendwo übersteht.
Wir entfernen nun (etwa mittels einer Säge) das obere linke und das untere rechte Feld des Schachbretts.
Ist es weiterhin möglich, die verbleibenden 62 Felder des Schachbretts mit 31 Dominosteinen zu bedecken, ohne daß ein Stein irgendwo übersteht? Begründen Sie Ihre Antwort.

(Wenn Sie dieses Rätsel bereits kennen, denken Sie über den Fall nach, daß man zwei andere Felder entfernt. Können Sie eine ganz allgemeine Aussage treffen?)