Mathematisches Institut
Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Dr. Benno Kuckuck

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Nachklausur Lineare Algebra I

Wintersemester 2013/2014
24.03.2014

Nachname: ....

Vorname: ....

Matrikelnr: ....

Bitte beachten Sie die folgenden Hinweise:

- Beginnen Sie die Klausur nur nach der allgemeinen Aufforderung.
- Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
- Beginnen Sie jede neue Aufgabe jeweils auf einem neuen Blatt.
- Begründen Sie all Ihre Aussagen sorgfältig, falls nicht anders verlangt.
- Die Bearbeitungszeit beträgt insgesamt 120 Minuten.
- Geben Sie am Ende Deckblatt, ggf. mit Unterschrift, Aufgabenblatt und Ihre jeweiligen Lösungsblätter geordnet ab.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*16 Punkte*)

(a) Markieren Sie für jede Aussage direkt auf diesem Blatt, ob diese wahr (W) oder falsch (F) ist. (Keine schriftlichen Begründungen!)

W	F	
☐	☐	Jedes minimale Erzeugendensystem eines Vektorraums V ist linear unabhängig.
☐	☐	Für jeden endlich dimensionalen Vektorraum V gilt: Ist U ein Untervektorraum von V, so existiert genau ein Untervektorraum W mit $U \oplus W = V$.
☐	☐	Es gilt $\dim V - \dim \mathrm{Bild}(\varphi) + \dim \mathrm{Kern}(\varphi) = 0$ für jede lineare Abbildung $\varphi\colon V \to W$ mit $\dim V < \infty$.
☐	☐	Das charakteristische Polynom einer symmetrischen reellen $n \times n$ Matrix zerfällt über $\mathbb{R}$ in Linearfaktoren.
☐	☐	Für Elemente v, w eines euklidischen Vektorraums V mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ gilt stets: $\langle v, w \rangle \leq \langle v, v \rangle + \langle w, w \rangle$.

Bearbeiten Sie Aufgabenteile (b) und (c) auf einem Extrablatt.

(b) Geben Sie, ohne Beweis, die Dimensionsformel für die Summe $U + W$ von Untervektorräumen U, W eines endlich dimensionalen Vektorraumes V an.

(c) Entscheiden Sie für jede der nachstehenden Aussagen, ob diese wahr oder falsch ist, und geben Sie einen Beweis bzw. ein Gegenbeispiel an.

(i) Sind $A, B \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$, so ist $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.

(ii) Seien $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ und $m \in \mathbb{N}$ mit $A^m = \mathrm{Id}$, wobei Id die $n \times n$ Einheitsmatrix bezeichnet. Ist $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von A, so folgt $\lambda \in \{1, -1\}$.

Aufgabe 2 (*12 Punkte*) Betrachten Sie die lineare Abbildung

$$\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \mapsto (10x - 7y, 7x - 4y).$$

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von α und lesen Sie die Eigenwerte von α ab.

(b) Berechnen Sie die Eigenräume des Endomorphismus α, indem Sie jeweils Basen für diese angeben.

(c) Entscheiden Sie, ob α diagonalisierbar ist.

(*Bewertung in Aufgabe 1, Teil* (a)*: pro korrekte Antwort 1 Punkt.*)

Aufgabe 3 (*12 Punkte*) Sei V ein Vektorraum über einem Körper K, und sei $\varphi\colon V \to V$ ein Endomorphismus von V.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Kern}(\varphi)$ ein Untervektorraum von V ist.

(b) Zeigen Sie: φ ist injektiv genau dann, wenn $\mathrm{Kern}(\varphi) = \{0\}$.

(c) Seien v und w Eigenvektoren von φ zu zwei verschiedenen Eigenwerten $\lambda \neq \mu$ in K. Zeigen Sie, dass v und w linear unabhängig sind.

Aufgabe 4 (*14 Punkte*) Sei $n \in \mathbb{N}$.

(a) Für welche $c \in \mathbb{R}$ ist $U_c = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \ldots + x_n = c\}$ ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Zeigen Sie: $W_1 = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \forall i \in \{1, \ldots, n\}\colon x_{n-i} = x_i\}$ und $W_2 = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \forall i \in \{1, \ldots, n\}\colon x_{n-i} = -x_i\}$ sind Untervektorräume des $\mathbb{R}^n$.

(c) Beweisen Sie, dass für W_1 und W_2 wie in (b) gilt: $\mathbb{R}^n = W_1 \oplus W_2$.

Aufgabe 5 (*12 Punkte*) Betrachten Sie die mittels der Matrix

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 & -7 \\ 0 & 5 & 2 & -4 \\ -6 & -3 & 4 & 10 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3,4}(\mathbb{Q})$$

definierte lineare Abbildung $\vartheta\colon \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^4$, $x \mapsto xT$.

(a) Bestimmen Sie Basen für den Kern und das Bild von ϑ.

(b) Bestimmen Sie Basen $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ von $\mathbb{Q}^3$ und $\mathcal{C} = (w_1, w_2, w_3, w_4)$ von $\mathbb{Q}^4$, so dass die Koordinatenmatrix von ϑ bzgl. $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ die folgende Form hat:

$$[\vartheta]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6 (*14 Punkte*) Betrachten Sie, für $t \in \mathbb{R}$, den von den Vektoren

$$(t, -1, t+1, 4), \qquad (7t-2, -7, 7t+4, 27),$$
$$(2, 0, 3, 1), \qquad (21t-4, -21, 21t+15, 82)$$

erzeugten Untervektorraum U_t des euklidischen Standardvektorraumes $\mathbb{R}^4$.

(a) Bestimmen Sie, in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$, eine Basis von U_t und eine Ergänzung derselben zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$.

(b) Bestimmen Sie, in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$, eine Basis für das orthogonale Komplement von U_t in $\mathbb{R}^4$.

(c) Bestimmen Sie, für $t = 7$, eine Orthonormalbasis für U_t.