Merkblatt (zur Lin Alg I); ohne Beweise Klopsch

$\boxed{\text{Der Körper } \mathbb{R} \text{ der reellen Zahlen}}$

- Sei K ein Körper ($\rightsquigarrow$ §4). Eine <u>Ordnung</u> auf K ist eine Relation $\leq$ auf K mit:
  - $\leq$ ist eine totale Ordn auf K ($\rightsquigarrow$ §8)
  - $\forall a,b,c \in K: \quad a \leq b \to a+c \leq b+c$
  - $\forall a,b,c \in K: \ (a \leq b \ \wedge \ 0 \leq c) \longrightarrow \ ac \leq bc$

  Wir nennen $K = (K, \leq)$ dann einen <u>angeordneten Körper</u>.

- Ein Körper K heißt <u>formal reell</u>, wenn sich -1 <u>nicht</u> als Summe von Quadraten in K darstellen läßt.

  Bem: Nach einem Satz von Artin & Schreier gilt:

  K besitzt eine Ordnung gdw K formal reell ist.
  (möglw viele versch)

- Ein Körper K heißt <u>reell abgeschlossen</u>, wenn es genau eine Ordnung $\leq$ auf K gibt; für diese gilt dann: $\forall a,b \in K: (a \leq b \leftrightarrow \exists c \in K: b-a = c^2)$.

- Sei $(K, \leq)$ ein angeordn Körper. Notwendigerweise ist dann $\mathrm{char}(K) = 0$, und wir dürfen $\mathbb{Q}$ als Teilkörper von K verstehen. Wir nennen $\leq$ bzw den angeord Körper $(K, \leq)$ <u>archimedisch</u>, Klopsch

falls gilt: $\forall a\in K\ \exists n\in\mathbb{N}: a\le n$.

Bem: Diese Bed ist äquivalent dazu, daß $\mathbb{Q}$ „dicht" in K liegt, d.h. zu

$$\forall a \overset{<}{,} b\in K\ \exists x\in\mathbb{Q}: a<x<b.$$

[Wie übl schreiben wir $a<b$ für $a\le b \wedge a\ne b$.]

∘ Sei $(K,\le)$ ein geordn Körper. Für $a\in K$ sei

$$|a| = \max\{a,-a\} = \begin{cases} a & \text{falls } -a\le a, \\ -a & \text{sonst.} \end{cases}$$

NB: $|a|\ge 0$

Technisch bedingt sei $(K,\le)$ nun archimedisch.

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in K konvergiert gegen $a\in K$, falls gilt:

$$\forall e\in K_{>0}\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n\in\mathbb{N}_{\ge N}: |a-a_n|<e.$$

Eine Cauchyfolge in K ist eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$\forall e\in K_{>0}\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall m,n\in\mathbb{N}_{\ge N}: |a_n-a_m|<e.$$

Bem: Jede konvergente Folge ist eine Cauchyfolge.

Der arch angeord Körper $(K,\le)$ heißt komplett, falls jede Cauchyfolge in K bereits konvergiert.

∘ Es gilt: Bis auf „Isomorphie" (dh bis auf strukturerhaltende Bijektion) gibt es genau einen kompletten archim angeordneten Körper, nämlich den Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen; jede reelle Zahl läßt sich als Grenzwert einer geeig Folge von rationalen Zahlen angeben (zB über Dezimalbrüche).