§ 18 Euklidische Vektorräume

Klopsch

GV Sei V ein $\mathbb{R}$-VR.

27 / 28

(18,1) Def (Skalarprodukt, eukl VR)

a) Ein Skalarprodukt auf V ist eine Abb.

$$\langle \cdot , \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}, \quad (v,w) \mapsto \langle v,w \rangle$$

mit

(SP1) $\forall a \in \mathbb{R}\ \forall u,v,w \in V$:

$$\langle au+v, w \rangle = a\langle u,w \rangle + \langle v,w \rangle$$

und

$$\langle u, av+w \rangle = a\langle u,v \rangle + \langle u,w \rangle$$

[Bilinearität]

(SP2) $\forall v,w \in V$: $\langle v,w \rangle = \langle w,v \rangle$ [Symmetrie]

(SP3) $\forall v \in V \setminus \{0\}$: $\langle v,v \rangle > 0$ [Positiv-Definitheit]

b) Ein euklidischer Vektorraum ist ein reeller VR V mit einem Skalarprodukt $\langle , \rangle_V$. Die Abb $\| \cdot \| : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $v \mapsto \|v\| = \sqrt{\langle v,v \rangle}$ heißt dann euklidische Norm auf V und hat offenbar die Eigenschaften

- $\forall v \in V \setminus \{0\}$: $\|v\| > 0$
- $\forall a \in \mathbb{R}\ \forall v \in V$: $\|av\| = |a| \cdot \|v\|$
- $\forall v,w \in V$: $\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$ [siehe (18.3)]

Bem: $d : V \times V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $d(v,w) = \|v-w\|$ liefert eine „Abstandsfunktion“ auf dem eukl VR V.

(18.2) Bsple Klopsch

a) Der Stand' VR $V = \mathbb{R}^n$, $n = \dim V < \infty$, wird mittels des Stand' Skalarproduktes (vgl ÜB-Blatt 11)

$$\langle (x_1,\dots,x_n), (y_1,\dots,y_n) \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad \left[= (x_1 \dots x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right]$$

zu einem eukl VR mit Norm

$$\| (x_1,\dots,x_n) \| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \quad [\text{Pythagoras !}]$$

b) Der VR $V = \mathcal{C}([a,b])$ aller stetigen Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ auf dem endl, abgeschl Intervall $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ wird mittels des Skalarproduktes [Übung !]

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx$$

zu einem eukl VR.

(18.3) Satz (Cauchy-Schwarzsche Ungl)

Sei V ein eukl VR, und $v, w \in V$.

Dann gilt $\quad |\langle v,w\rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$

mit Gleichheit gdw $\langle v \rangle \subseteq \langle w \rangle$ oder $\langle v \rangle \supseteq \langle w \rangle$
[d.h. v, w lin abh.]

Bew Gilt $w = av$ mit $a \in \mathbb{R}$, so ist

$|\langle v,w\rangle| = |a|\,\|v\|^2 = \|v\|\,\|w\|$. Ebenso für $v = bw$ mit $b \in \mathbb{R}$.

Seien nun v, w lin unabh. Für $a \in \mathbb{R}$ ist dann $av - w \neq 0$, also

$$0 < \|av - w\|^2 = \langle av - w, av - w \rangle = a^2 \|v\|^2 - 2a \langle v,w \rangle + \|w\|^2$$

$$= \left(a\|v\| - \frac{\langle v,w \rangle}{\|v\|} \right)^2 + \|w\|^2 - \frac{|\langle v,w\rangle|^2}{\|v\|^2}$$

(qu Erg)

Für $a = \langle v,w\rangle / \|v\|^2$ ergibt sich

Klopsch

$$0 < \|w\|^2 - \frac{|\langle v,w\rangle|^2}{\|v\|^2}, \text{ also } |\langle v,w\rangle|^2 < \|v\|^2\,\|w\|^2$$

und damit die strikte Ungleichung. //

Anwendung: Aus der CS-Ungl folgt für $v,w \in V$:

$$\|v+w\|^2 = \langle v+w, v+w\rangle = \|v\|^2 + 2\langle v,w\rangle + \|w\|^2$$
$$\leq \|v\|^2 + 2\|v\|\,\|w\| + \|w\|^2 = (\|v\| + \|w\|)^2,$$

also $\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$.

(18.4) Def (Orthogonalität)

Sei V ein eukl VR, $U \subseteq V$ ein Unterraum.

a) $v \perp w \Leftrightarrow_{def} \langle v,w\rangle = 0$ definiert eine [senkrecht] symmetr Relation auf V

b) $U^\perp = \{v \in V \mid \forall u \in U: u \perp v\}$ heißt das orthogonale „Komplement" zu U [siehe (18.6)]

c) Ein Orthonormalsystem in V ist ein Vektorsystem $(v_1, \dots, v_m)$ in V mit $v_i \perp v_j$ für $i \neq j$ und $\|v_i\| = 1$ für alle i

d) Eine Orthonormalbasis von V ist eine Basis von V, deren Elemente senkrecht zueinander stehen und jeweils die Norm 1 haben.

Bem Wir interessieren uns vorrangig für den Fall $\dim V < \infty$ und unterscheiden sprachlich nicht mehr zwischen Orthonormalbasen und geordneten Orthonormalbasen.

Klopsch

(18.5) Hilfssatz Sei V ein eukl VR, $U \subseteq V$ ein Unterraum.

(1) $U^\perp$ ist ein Unterraum von V.

(2) Ist $(v_1, \dots, v_m)$ ein Orthonormalsystem in V, so ist $(v_1, \dots, v_m)$ eine Orthonormalbasis für $\langle v_1, \dots, v_m \rangle$.

(3) Ist $\dim V = n < \infty$ und $(v_1, \dots, v_n)$ eine Orthonormalbasis für V, so gilt für jedes $w \in V$:

$$w = \langle w, v_1 \rangle v_1 + \dots + \langle w, v_n \rangle v_n.$$

Bew: (1) folgt leicht aus dem Unterraumkriterium.

(2) Zz: Ein Orthonormalsystem $(v_1, \dots, v_m)$ besteht aus lin unabh Vektoren. Sei $\sum_{i=1}^m a_i v_i = 0$.

Dann gilt für jedes $j \in \{1, \dots, m\}$:

$$a_j = \sum_{i=1}^m a_i \langle v_i, v_j \rangle = \langle \underbrace{\sum_{i=1}^m a_i v_i}_{=0}, v_j \rangle = 0.$$

Somit sind $v_1, \dots, v_m$ lin unabh.

(3) leichte Rechnung wie in (2). //

(18.6) Satz Sei V ein eukl VR und $U \subseteq V$ ein Unterraum mit $\dim U < \infty$. Dann gilt

(1) Jedes Orthonormalsystem von U läßt sich zu einer Orthonormalbasis von U ergänzen.

(2) $V = U \oplus U^\perp$ [erklärt die Bezeichnung orthogonales Komplement]

[Bem: Ohne die Voraussetzung $\dim U < \infty$ gelten die Aussagen i.a. nicht! Man ändert daher die Definitionen geeignet ab, um eine brauchbare Theorie zu entwickeln.]

Bspl Der Raum der quadratisch summierbaren reellen Folgen

$$\ell^2 = \{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty \}$$

ist ein Unterraum des Folgenraumes $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Weiter liefert

$$\langle (x_n), (y_n) \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n \qquad \text{für } (x_n), (y_n) \in \ell^2$$

ein Skalarprodukt auf ℓ^2, und $V = \ell^2$ ist auf diese Weise ein eukl VR.

Offenbar ist

$$W = \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} = \{ (x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N : x_n = 0 \}$$

ein Unterraum von V mit Orthonormalbasis

$$e_i = (0, \dots, 0, \underset{\uparrow i}{1}, 0, 0, \dots), \quad i \in \mathbb{N}.$$

Dann gilt $W^\perp = \{0\}$ und $W + W^\perp = W \subsetneq V$.

Insbesondere läßt sich $\{e_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ auch nicht zu einer Orthonormalbasis von V (im abstrakten Sinne) ergänzen.

Bew: Wir verwenden Induktion nach $m = \dim U$.

IA: $m = 0$. Klar.

IS: $m \geq 1$. Sei $(u_1, \dots, u_k)$ ein Orthonormalsystem in U. Ist $k = m$, so ist $(u_1, \dots, u_k)$ nach (18.5) bereits eine Orthonormalbasis für U. Sei nun $k < m$. Wähle einen beliebigen Unterraum $W \subseteq U$ mit $u_1, \dots, u_k \in W$ und $\dim W = m-1$. Nach IV können wir zu einer Orthonormalbasis $(u_1, \dots, u_{m-1})$ für W ergänzen, und es gilt $U = W \oplus (W^\perp \cap U)$.

Die Dimformel liefert $\dim(W^\perp \cap U) = 1$,

also $W^\perp \cap U = \langle u \rangle$ für ein geeignetes $u \in U \setminus \{0\}$.

Indem wir $u_m = \frac{1}{\|u\|} u$ setzen, erhalten wir eine

Orthonormalbasis $(u_1, u_2, \dots, u_m)$ von U. 28

Es bleibt zz: $V = U \oplus U^\perp$. Offenbar ist 0 29

der einzige Vektor, der senkrecht auf sich selbst steht.

Also gilt $U \cap U^\perp = \{0\}$. Sei nun $v \in V$. Dann

gilt

$$v = \underbrace{\left(v - \sum_{i=1}^{m} \langle v, u_i \rangle u_i \right)}_{\in U^\perp \text{ da } \perp \text{ zu } u_1, \dots, u_m} + \underbrace{\sum_{i=1}^{m} \langle v, u_i \rangle u_i}_{\in U},$$

also $V = U + U^\perp$.

(18.7) <u>Korollar</u> Jeder endl dim'l euklidische VR V

besitzt eine Orthonormalbasis $(v_1, \dots, v_n)$ und

die Koord abb $\iota : V \to \mathbb{R}^n$, $\sum_{i=1}^{n} a_i v_i \mapsto (a_1, \dots, a_n)$

liefert einen Isomorphismus, der mit den

Skalarprodukten verträglich ist:

$$\forall v, w \in V : \quad \langle v, w \rangle_V = \langle v\iota, w\iota \rangle_{\mathbb{R}^n}.$$

(18.8) <u>Gram-Schmidt-Verfahren</u>

Der Beweis von (18.6) läßt sich in das folgende

praktische Verfahren übersetzen:

Sei V ein euklid VR und $(v_1, \dots, v_m)$ ein

lin unabh Vektorsystem in V.

Klopsch

Definiere $(u_1, \dots, u_m)$ induktiv durch die Gleichungen

$$u_i = \frac{1}{\|w_i\|} w_i \,, \quad \text{wobei} \quad w_i = v_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle v_i, u_j \rangle u_j$$

$$\in \langle u_1, \dots, u_{i-1} \rangle^{\perp},$$

für $i \in \{1, \dots, m\}$.

Dann ist $(u_1, \dots, u_m)$ ein Orthonormalsystem in V mit $\langle v_1, \dots, v_m \rangle = \langle u_1, \dots, u_m \rangle$.

Insbesondere gilt: Ist $v_1, \dots, v_m$ eine beliebige Basis von V, so ist $u_1, \dots, u_m$ wie oben eine Orthonormalbasis von V.

(18.3) Def / Satz (orthogonale Abb und Matrizen)

a) Sei V ein eukl VR. Ein Endomorphismus $\alpha: V \to V$ heißt orthogonal, falls gilt:

$$\forall v, w \in V: \quad \langle v\alpha, w\alpha \rangle = \langle v, w \rangle.$$

Solch ein α erfüllt dann auch

$$\forall v, w \in V: \quad \| v\alpha - w\alpha \| = \| v - w \|$$

und ist in diesem Sinne Abstand-erhaltend.

Insbesondere ist $\mathrm{Ker}(\alpha) = \{0\}$, und für $\dim V < \infty$ gilt $\alpha \in GL(V)$.

b) Eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ heißt orthogonal, falls A invertierbar mit $A^{-1} = A^{tr}$ ist. Die Menge $O(n, \mathbb{R}) = \{ A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid A^{-1} = A^{tr} \}$ bildet eine Untergruppe von $GL_n(\mathbb{R})$, die orthogonale Gruppe vom Grad n.

Klopsch

Bspl:

$$O(2,\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\varepsilon\sin\varphi & \varepsilon\cos\varphi \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{matrix} \varepsilon\in\{1,-1\}, \\ \varphi\in[0,2\pi) \end{matrix} \right\}$$

besteht aus Drehungen um den Ursprung ($\varepsilon=1$)

und Geradenspiegelungen an Geraden durch den Ursprung ($\varepsilon=-1$)

(18.10) <u>Satz</u> Sei V ein endl diml eukl VR mit Orthonormalbasis $\mathcal{B}=(v_1,\dots,v_n)$, und $\alpha: V\to V$ lin. Dann sind äquivalent:

(a) α ist orthogonal.

(b) $(v_1\alpha,\dots,v_n\alpha)$ ist eine Orthonormalbasis für V.

(c) $[\alpha]_{\mathcal{B}\mathcal{B}}$ ist orthogonal.

<u>Bew</u>: (a) $\to$ (b): klar

(b) $\to$ (a): folgt wie (18.7); für $\sum_i a_i v_i, \sum_j b_j v_j \in V$

gilt $\left< \left(\sum_i a_i v_i\right)\alpha, \left(\sum_j b_j v_j\right)\alpha \right>$

$$= \sum_i \sum_j a_i b_j \left< v_i\alpha, v_j\alpha \right> = \sum_i a_i b_i = \left< \sum_i a_i v_i, \sum_j b_j v_j \right>.$$

(b) $\leftrightarrow$ (c): Die Zeilen von $A=[\alpha]_{\mathcal{B}}$ kodieren die Koordinaten von $v_1\alpha,\dots,v_n\alpha$ bzg $\mathcal{B}$. Daher sind äquivalent:

- $(v_1\alpha,\dots,v_n\alpha)$ ist eine Orthonormalbasis
- Die Zeilen von A stehen senkrecht aufeinander und sind normiert (bzgl des Standskprod auf $\mathbb{R}^n$).
- $A\cdot A^{tr} = Id$.

//

(18.11) Lem: Seien $l, m, n \in \mathbb{N}$ und K ein Körper. Für $A \in Mat_{l,m}(K)$, $B \in Mat_{m,n}(K)$ gilt dann $(A \cdot B)^{tr} = B^{tr} A^{tr}$ in $Mat_{n,l}(K)$. Klopsch

Bew: Nachrechnen; konzeptionelle Erklärung in LA II. //

(18.12) Def (selbst-adj Endom, symmetrische Matrix)

a) Sei V ein eukl VR. Ein Endom $\alpha : V \to V$ heißt selbst-adjungiert, falls gilt:

$$\forall v, w \in V : \langle v\alpha, w \rangle = \langle v, w\alpha \rangle$$

[Bem: Allgemeiner gibt es für $\dim V < \infty$ zu jedem $\alpha \in End(V)$ eine Adjungierte $\alpha^\wedge \in End(V)$, und α ist selbst-adj gdw $\alpha = \alpha^\wedge$.]

b) Eine Matrix $A \in Mat_n(\mathbb{R})$ heißt symmetrisch, falls $A = A^{tr}$ ist.

(18.13) Satz Sei V ein endl dimel eukl VR mit Orthonormalbasis $\mathcal{B}$, und $\alpha : V \to V$ ein. Dann sind äquivalent:

(a) α ist selbst-adjungiert.

(b) $[\alpha]_{\mathcal{B}}$ ist symmetrisch.

Bew: Wir benutzen implizit (18.7). Für $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$, und $A = [\alpha]_{\mathcal{B}}$ alle $\sum_i a_i v_i, \sum_j b_j v_j \in V$ gilt:

$$\langle (\sum_i a_i v_i)\alpha, (\sum_j b_j v_j) \rangle = (a_1, \dots, a_n) A \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$= (a_1, \dots, a_n) \cdot A \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \underset{(18.11)}{=} (a_1, \dots, a_n) \cdot \left((b_1, \dots, b_n) A^{tr} \right)^{tr} =$$

Klopsch

$= \langle (\sum_i a_i v_i), (\sum_j b_j v_j)\beta \rangle$,

wobei die lin Abb $\beta : V \to V$ durch $[\beta]_{\mathcal{B}} = A^{tr}$ eindeutig bestimmt ist. Daher gilt $\alpha = \beta$ oder $A = A^{tr}$ ist.

(18.14) Spektralsatz (für endl diml euklid VR)

(1) Sei V ein endl diml eukl VR und $\alpha : V \to V$ ein selbst-adj Endom. Dann ex eine Orthonormalbasis von V, die aus Eigenvektoren von α besteht.

[Insbesondere sind alle Eigenwerte von α reell und α ist diagonalisierbar.]

(2) Sei $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ symmetrisch. Dann ex eine orthogonale Matrix $S \in O(n, \mathbb{R})$, so daß

$$S^{-1} A S = S^{tr} A S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ diagonal ist.}$$

Bew: (1) Nach (18.7) dürfen wir oE $V = \mathbb{R}^n$ mit dem Stand'sk'prod betrachten. Setze $A = [\alpha]_{\mathcal{E}}$, wobei $\mathcal{E}$ die Stand'basis bezeichne. Offenbar liefert $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) \subseteq \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ einen Endom $\alpha_{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$. Da $\mathbb{C}$ alg abgeschl ist (vgl (13.14)), besitzt $\mathrm{Charpol}(\alpha_{\mathbb{C}})$ jedenfalls eine Nullstelle $\lambda \in \mathbb{C}$, dh $\alpha_{\mathbb{C}}$ einen Eigenvektor $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ zu einem Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$. Aus $z\alpha_{\mathbb{C}} = zA = \lambda z$ folgt für den komplex-konjugierten Vektor

Klopsch

$\bar{z} = (\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n) \in \mathbb{C}^n$:

$$\bar{z}\,\alpha_{\mathbb{C}} = \bar{z} A = \overline{zA} = \overline{\lambda z} = \bar{\lambda}\,\bar{z}.$$

Es folgt (unter Verwendung des Stand´skal prod auf $\mathbb{C}^n$):

$$\lambda \langle z, \bar{z} \rangle_{\mathbb{C}^n} = \langle \lambda z, \bar{z} \rangle_{\mathbb{C}^n} = \langle zA, \bar{z} \rangle_{\mathbb{C}^n}$$

$$= zA \cdot (\bar{z})^{tr} = z \cdot (\bar{z} A^{tr})^{tr} \underset{\substack{\uparrow \\ A^{tr} = A \\ \text{nach } (18,13)}}{=} z \cdot (\bar{z} A)^{tr}$$

$$= \langle z, \bar{z} A \rangle_{\mathbb{C}^n} = \langle z, \bar{\lambda} \bar{z} \rangle_{\mathbb{C}^n} = \bar{\lambda} \langle z, \bar{z} \rangle_{\mathbb{C}^n},$$

wobei $\langle z, \bar{z} \rangle_{\mathbb{C}^n} = \sum_{i=1}^{n} z_i \bar{z}_i = \sum_{i=1}^{n} |z_i|^2 \neq 0$ ist.

Das ergibt $\lambda = \bar{\lambda}$, also $\lambda \in \mathbb{R}$.

Somit ist λ eine ~~reeller~~ Nullstelle von Charpol(α), dh α besitzt einen Eigenvektor $v_1 \in \mathbb{R}^n$ zu dem Eigenwert λ.

Setze $U = \langle v_1 \rangle$ und $W = U^\perp$. Für $w \in W$ gilt

$$\langle w\alpha, v_1 \rangle = \langle w, v_1\alpha \rangle = \langle w, \lambda v_1 \rangle = \lambda \langle w, v_1 \rangle = \lambda \cdot 0 = 0,$$

also $w\alpha \in W$. Somit ist $\alpha|W$ ein Endom von W. Nach (18.6) ist $\dim W = n-1 < n$. Per Induktion besitzt W daher eine Orthonormalbasis $(v_2, \ldots, v_n)$, die aus Eigenvektoren von $\alpha|W$ besteht. Dann ist, wieder, nach (18,6), $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Orthonormalbasis von $V = \mathbb{R}^n$, die aus Eigenvektoren von α besteht.

(2) ergibt sich aus (1), indem man für S die Übergangsmatrix zwischen der Standardbasis und der durch (1) gesicherten Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$ wählt; vgl (15.18). //

Klopsch

Schlußwort / Ausblick

Gerade die letzten Kapitel §15 – §18 behandeln die zutage tretenden Probleme / Fragestellungen nur in speziellen Situationen.

Wichtige Fragen, die in der LA II ausführlicher geklärt werden sollen, betreffen zB:

- das Klassifikationsproblem für Endomorphismen eines endl. dim. VR
  konkret: Was macht man bei Endomorphismen, die sich nicht diagonalisieren lassen?
- Wie verallgemeinert sich die Theorie euklidischer VR zu ähnlichen VR
  - über $\mathbb{C}$ ($\rightsquigarrow$ unitäre VR)
  - anderen Körpern, z.B. $\mathbb{Q}$ ($\rightsquigarrow$ zahlentheoretische Fragen) ?
- Wie paßt die Theorie der Determinanten in eine allgemeinere Theorie multilinearer Abb., die zB in der Geometrie eine wichtige Anwendung findet?

* Fortsetzung im nächsten Semester