§ 17 Eigenwerte, charakteristisches Polynom und Diagonalisierung von Endomorphismen

Klopsch

GV: V K-VR, $n = \dim V < \infty$

$\mathcal{B}$ Basis von V

$\alpha : V \to V$ Endom, $A = [\alpha]_{\mathcal{B}} \in \mathrm{Mat}_n(K)$

$$A = (a_{ij})$$

Motivation: Die einfachsten lin Abb $V \to V$ sind die Homothetien $\mu_a : V \to V$, $v \mapsto av$ für $a \in K$.

Idee: Zerlege α nach Möglichkeit in Homothetien.

(17.1) Def (Eigenwert, -vektor und -raum)

Eine Zahl $\lambda \in K$ [Notation traditionell!] heißt Eigenwert von α (bzw A), falls es zu λ einen Vektor $v \in V \setminus \{0\}$ gibt mit $v\alpha = \lambda v$.

Jedes solche $v \in V \setminus \{0\}$ heißt dann Eigenvektor von α zum Eigenwert λ.

Für $\lambda \in K$ heißt

$$\mathrm{Eig}(\alpha, \lambda) = \{ v \in V \mid v\alpha = \lambda v \}$$

der Eigenraum von α zu λ; seine von 0 verschiedenen Elemente sind gerade die Eigenvektoren zu einem Eigenwert λ.

Klopsch

(17.2) Bspl

(1) $\alpha = \mu_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (x,y)A$

für $A = \begin{pmatrix} 1/5 & -3/5 \\ 9/10 & 23/10 \end{pmatrix}$, $\mathcal{B} = ((1,0),(0,1))$ die Stand'basis

[mögliche Interpretation:

- zwei Populationen: x „Räuber"
  y „Beute"

- in einem Zeitabschnitt verändern sich die Größen gemäß

$$x_{neu} = 1/5\, x + 9/10\, y$$
$$y_{neu} = -3/5\, x + 23/10\, y$$

- Was passiert auf lange Sicht? D.h., wie hängt

$(x,y).A^N$ für große $N \in \mathbb{N}$ qualitativ vom Ausgangspunkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ab?

„Diskretisierung eines kontinuierlichen Problems, das durch Differentialgleichungen beschrieben werden kann"]

Bestimme die zugeh. Eigenwerte:

- $v\alpha = \lambda v$ bedeutet $(x,y)A = (\lambda x, \lambda y)$, also

$$\begin{cases} (1/5 - \lambda)\, x + 9/10\, y = 0 \\ -3/5\, x + (23/10 - \lambda)\, y = 0 \end{cases}$$

Glsys hat nicht-triviale Lösungen $(x,y) \neq (0,0)$ gdw

Klopsch

$$\text{Rang}\begin{pmatrix} 1/5-\lambda & 9/10 \\ -3/5 & 23/10-\lambda \end{pmatrix} < 2 \text{ , oder äquiv dazu}$$

$$\underbrace{\det\begin{pmatrix} 1/5-\lambda & 9/10 \\ -3/5 & 23/10-\lambda \end{pmatrix}}_{} = 0 \text{ ist.}$$

$$= (1/5-\lambda)(23/10-\lambda) - 9/10(-3/5) = \lambda^2 - \tfrac{5}{2}\lambda + 1$$

$$= (\lambda-2)(\lambda-\tfrac{1}{2})$$

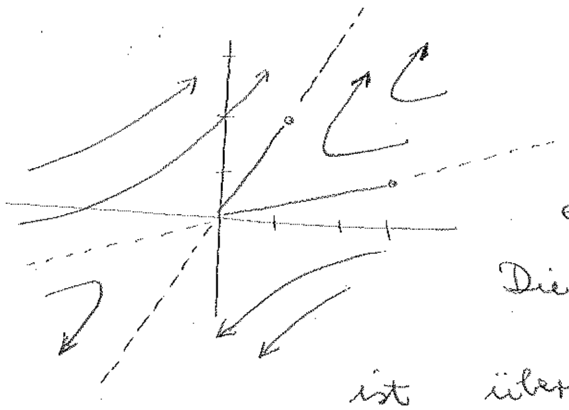
Somit gibt es zwei Eigenwerte

$\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = \frac{1}{2}$,

Löst man für diese Parameter das lin Glsyst ,

so erhält man die zugeh Eigenräume

$$\text{Eig}(\alpha, 2) = \langle (1,2) \rangle \text{ , } \text{Eig}(\alpha, \tfrac{1}{2}) = \langle (3,1) \rangle$$



Die speziellen Eigenvektoren $(1,2)$, $(3,1)$ bilden eine Basis $\mathcal{B}'$ von $\mathbb{R}^2$.

Die Koordmatrix $A' = [\alpha]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

ist übersichtlicher : $(A')^N = \begin{pmatrix} 2^N & 0 \\ 0 & 1/2^N \end{pmatrix}$

für $N \in \mathbb{N}$.

Es gilt : $A' = T^{-1}AT$,

wobei $T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ und $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-5}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -1/5 & 2/5 \\ 3/5 & -1/5 \end{pmatrix}$

die entspr Übergangsmatrizen bezeichnen.

Klopsch

(2) $\alpha = \mu_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (x,y) \mapsto (x,y)\,A$

für $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathcal{B} = ((1,0),(0,1))$

[Interpretation: Drehung $\circlearrowleft$ um $\pi/2$]

Anschaulich ist klar, daß α keine reellen Eigenwerte hat. Rechnerisch hat die Gleichung

$$\lambda^2 + 1 = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = 0 \quad \text{erst in } \mathbb{C}$$

Lösungen $\lambda_1 = i$ und $\lambda_2 = -i$.

(17.3) <u>Hilfsatz</u> Sei $\lambda \in K$.

1) $\mathrm{Eig}(\alpha,\lambda) = \mathrm{Kern}(\underbrace{\lambda\cdot \mathrm{id}_V - \alpha}_{\in \mathrm{End}(V)})$, insbesondere ist $\mathrm{Eig}(\alpha,\lambda)$ ein Unterraum von V.

2) 0 ist ein Eigenwert von α gdw $\mathrm{Kern}(\alpha) \neq \{0\}$, dh α nicht injektiv ist.

3) λ ist ein Eigenwert von α (bzw A) gdw

$\det(\lambda\cdot \mathrm{Id} - A) =$

$$\begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \\ -a_{n1} & \ddots & & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$ gleich 0 ist.

<u>Bew</u>: 1) Für $v \in V$ sind äquivalent:

$v\alpha = \lambda v$, $\lambda v - v\alpha = 0$, $v(\lambda \mathrm{id}_V - \alpha) = 0$, $v \in \mathrm{Kern}(\lambda \mathrm{id}_V - \alpha)$.

Klopsch

2) folgt aus 1)

3) Offenbar ist $\mathrm{Kern}(\lambda \cdot \mathrm{id}_V - \alpha) \neq \{0\}$ gdw

$\lambda \mathrm{id}_V - \alpha$ in $\mathrm{End}(V)$ nicht invertierbar ist.

Aufgrund von $\mathrm{End}(V) \cong \mathrm{Mat}_n(K)$ ist letztes äquiv zu

$(\lambda \cdot \mathrm{Id} - A) \notin GL_n(K)$ und dies wiederum mit

$\det(\lambda \, \mathrm{Id} - A) = 0$. // [siehe (16.3)]

(17.4) <u>Def</u>/Satz (charakteristisches Polynom)

Das <u>char Polynom</u> von α bzw A ist def

als $\mathrm{Charpol}(\alpha) = \mathrm{Charpol}(A) = \det(X \cdot \mathrm{Id} - A)$

$$= \begin{vmatrix} X - a_{11} & -a_{12} & \cdots & \\ -a_{21} & X - a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ -a_{n1} & \cdots & & X - a_{nn} \end{vmatrix} \in K[X],$$

wobei die spezielle Wahl der zugrunde liegenden Basis $\mathcal{B}$ keinen Einfluß hat.

Die Determinante für eine Matrix über dem Ring $K[X]$ ist hierbei mit Hilfe der Leibniz-Formel (16.3) definiert.

<u>Bem</u>: Der Integritätsbereich $K[X]$ ist wie $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Q}$ Unterring eines Körpers, zB des Körpers $K(X)$ der rationalen Funktionen über K, dessen Elemente Brüche von Polynomen sind.

Die Ergebnisse aus §16 lassen sich daher auch hier anwenden.

26 / 27

Klopsch

<u>Bew</u> Ist $\mathcal{B}'$ eine andere Basis von V,

so sind $A' = [\alpha]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}'}$ und $A = [\alpha]_{\mathcal{B}\mathcal{B}}$ über

eine Gleichung $A' = T^{-1}AT$, $T \in GL_n(K)$,

verbunden. Daraus folgt:

$$\mathrm{Charpol}(A') = \det(X\,Id - A') = \det(T^{-1}(X\,Id)T - T^{-1}AT)$$

$$= \det(T^{-1}(X\,Id - A)T) = \det(T^{-1})\det(X\,Id - A)\det(T)$$

$$= \underbrace{\det(T^{-1})\det(T)}_{=1}\det(X\cdot Id - A) = \mathrm{Charpol}(A). //$$

(17.5) <u>Hilfssatz / Def</u> Für $f = \mathrm{Charpol}(\alpha) = \mathrm{Charpol}(A) \in K[X]$ gilt:

a) $f = f_0 + f_1X + \dots + f_{n-1}X^{n-1} + X^n$

ist normiert vom Grad n;

hierbei gilt $f_0 = (-1)^n \det(A)$.

Insbesondere hängt $\det(\alpha) = \det(A)$ nicht von der Wahl von $\mathcal{B}$ ab und heißt <u>Determinante</u> von α

b) Die Eigenwerte von α bzw A sind genau die Nullstellen von f (über K).

<u>Bew</u>: a) Gemäß der Leibniz-Formel kommt der Leitterm von f aus dem Produkt

$(X - a_{11}) \cdots (X - a_{nn})$ und heißt X^n.

Weiter gilt $f_0 = f(0) = \det(-A) = (-1)^n \det(A)$.

b) folgt aus (17.3) 3) und der Def von $\mathrm{Charpol}(\alpha)$. //

(17.6) Korollar

Der Endom. $\alpha : V \to V$, $\dim V = n$, besitzt höchstens n verschiedene Eigenwerte.

Bew: folgt aus (17.5) b) und (13.11). //

(17.7) Hilfssatz Die Matrix $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ habe die Gestalt

$$A = \left(\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline 0 & D \end{array} \right) \quad \text{mit} \quad \begin{array}{l} B \in \mathrm{Mat}_m(K), \\ C \in \mathrm{Mat}_{m,n-m}(K), \\ D \in \mathrm{Mat}_{n-m}(K). \end{array}$$

Dann gilt

a) $\det(A) = \det(B)\det(D)$

b) $\mathrm{Charpol}(A) = \mathrm{Charpol}(B)\,\mathrm{Charpol}(D)$

Bew: Die Regeln ergeben sich aus der Leibniz-Formel: Nur Permutationen $\sigma \in \mathrm{Sym}(\{1,2,..,n\})$ von der Gestalt $\sigma = \sigma_1 \cdot \sigma_2$ mit $\sigma_1 \in \mathrm{Sym}(\{1,2,..,m\})$ und $\sigma_2 \in \mathrm{Sym}(\{m+1,..,n\})$ liefern von 0 verschiedene Beiträge und man nutzt $\mathrm{sgn}(\sigma) = \mathrm{sgn}(\sigma_1)\,\mathrm{sgn}(\sigma_2)$; vgl (16.7). //

(17.8) Satz (geometrische und algebraische Vielfachheit)

Für jeden Eigenwert $\lambda \in K$ von $\alpha : V \to V$ gilt

$$\underbrace{\dim \mathrm{Eig}(\alpha,\lambda)}_{\text{„geom Vielfachheit"}} \leq \underbrace{\text{Vielfachheit der Nullstelle } \lambda \text{ von } \mathrm{Charpol}(\alpha)}_{\text{„algebr Vielfachheit"}}.$$

Bewskizze: Wende (17.7) an: Ergänze eine Basis von $\mathrm{Eig}(\alpha,\lambda)$ zu einer Basis $\mathcal{B}'$ von V, so daß $[\alpha]_{\mathcal{B}'} = \left(\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline 0 & \lambda \mathrm{Id} \end{array} \right)$

Klopsch

(17.9) Satz: Seien $v_1, \dots, v_m \in V$ Eigenvektoren zu pw versch Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in K$ von α.

Dann sind $v_1, \dots, v_m$ lin unabh.

Bew: Seien $a_1, \dots, a_m \in K$ mit $\sum_{i=1}^{m} a_i v_i = 0$.

zz: $a_1 = \dots = a_m = 0$.

Aus
$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_m a_i v_i = \lambda_m \sum_{i=1}^{m} a_i v_i = \lambda_m 0 = 0 \quad \text{und}$$
$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i v_i = \sum_{i=1}^{m} (a_i v_i)\alpha = \left(\sum_{i=1}^{m} a_i v_i\right)\alpha = 0\alpha = 0$$
folgt $\sum_{i=1}^{m} (\lambda_m - \lambda_i) a_i v_i = 0$.

Per Induktion nach m gilt $\underbrace{(\lambda_m - \lambda_i)}_{\neq 0} a_i = 0$,

also $a_i = 0$ für $i \in \{1, \dots, m-1\}$.

Mit $a_m v_m = 0$ ist wegen $v_m \neq 0$ auch $a_m = 0$. //

(17.10) Korollar Seien $\lambda_1, \dots \lambda_m \in K$ pw versch Eigenwerte von α. Dann gilt
$$\sum_{i=1}^{m} \mathrm{Eig}(\alpha, \lambda_i) = \bigoplus_{i=1}^{m} \mathrm{Eig}(\alpha, \lambda_i),$$
wobei die Notation rechts in Verallgemeinerung von (10.6), (10.7) bedeutet, daß sich jedes Element $v \in \sum_{i=1}^{m} \mathrm{Eig}(\alpha, \lambda_i)$ in eindeutiger Weise als $v = v_1 + \dots + v_m$ mit $v_i \in \mathrm{Eig}(\alpha, \lambda_i)$ schreiben läßt.

Insbesondere ist $\dim \bigoplus_{i=1}^{m} \mathrm{Eig}(\alpha, \lambda_i) = \sum_{i=1}^{m} \dim \mathrm{Eig}(\alpha; \lambda_i)$.

<u>Bew</u>: Die erste Beh folgt direkt aus (17.9).

Indem man Basen für die einzelnen $Eig(\alpha, \lambda_i)$ zusammensetzt, erhält man eine Basis für $\sum_{i=1}^{m} Eig(\alpha, \lambda_i)$. Damit ergibt sich die Dimensionsformel. //

(17.11) <u>Def</u> (diagonalisierbare Endom)

Der Endom $\alpha : V \to V$ (bzw die Matrix $A = [\alpha]_{\mathcal{B}\mathcal{B}}$) heißt <u>diagonalisierbar</u> (über K), falls es eine K-Basis $\mathcal{B}'$ von V gibt, dergestalt daß $A' = (a_{ij}') = [\alpha]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}'}$ diagonal ist (dh $a_{ij}' = 0$ für $i \neq j$).

<u>Bem</u> A ist diag gdw

$$\exists\, T \in Gl_n(K) : \quad T^{-1} A T = A' = \begin{pmatrix} a_{11}' & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn}' \end{pmatrix} \text{ diagonal}$$

(17.12) <u>Satz</u> (Kriterium für Diagonalisierbarkeit)

Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in K$ die pw versch Eigenwerte von $\alpha : V \to V$ in K. Dann sind äquivalent:

(a) α diagonalisierbar (über K).

(b) V besitzt eine Basis $\mathcal{B}'$, die aus Eigenvektoren von α besteht.

(c) $V = \sum_{i=1}^{m} Eig(\alpha, \lambda_i)$

(d) $V = \bigoplus_{i=1}^{m} Eig(\alpha, \lambda_i)$

(e) $\dim V = \sum_{i=1}^{m} \dim Eig(\alpha, \lambda_i)$

(f) $f = \mathrm{Charpol}(\alpha)$ zerfällt über K in Linearfaktoren $f = \prod_{i=1}^{m} (X - \lambda_i)^{e_i}$, wobei $e_i = \dim Eig(\alpha, \lambda_i)$ für $i \in \{1, \dots, m\}$.

[(f) bedeutet: f zerfällt in Lin Faktoren und die geom Vielfachheiten sind jew gleich den alg Vielfachheiten] Klopsch

Bew: Die folgenden Implikationen sind bereits bekannt / stehen noch aus:

$$\begin{tikzcd}(a) \arrow[r, leftrightarrow, "\text{klar}"'] & (b) \arrow[r, "\text{klar}"] & (c) \arrow[r, leftrightarrow, "(17.10)"] & (d) \arrow[r, "(17.10)"] \arrow[ll, bend left, "\text{Bew von (17.10)}"] & (e) \arrow[r, leftrightarrow, "(**)"'] \arrow[l, bend left, "(*)"] & (f)\end{tikzcd}$$

(*): Es gelte (e). Nach (17.10) ist $\bigoplus_{i=1}^{m} \mathrm{Eig}(\alpha, \lambda_i)$ ein Unterraum von V mit

$$\dim\left(\bigoplus_{i=1}^{m} \mathrm{Eig}(\alpha, \lambda_i)\right) = \sum_{i=1}^{m} \dim \mathrm{Eig}(\alpha, \lambda_i) = \dim V,$$

also gilt $\bigoplus_{i=1}^{m} \mathrm{Eig}(\alpha, \lambda_i) = V$.

(**): Nach (17.8) gilt stets:

$$\dim V = \mathrm{grad}(f) \geqq \sum_{i=1}^{m} \dim \mathrm{Eig}(\alpha, \lambda_i)$$

und Gleichheit gdw die Bedingungen in (f) erfüllt sind. //

(17.13) Korollar: Besitzt $\mathrm{Charpol}(\alpha) \in K[X]$ n pw verschiedene Nullstellen $\lambda_1, .., \lambda_n$ in K, so ist α diagonalisierbar, genauer gilt

$$A \approx \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Bew: Für jedes $i \in \{1, .., n\}$ ist $\dim \mathrm{Eig}(\alpha, \lambda_i) \geqq 1$.

~~Somit ist Bedingung~~ Nach (17.10) ist daher

$$n \leq \sum_{i=1}^{m} \dim \mathrm{Eig}(\alpha, \lambda_i) \leq \dim V = n.$$ Also ist (e) in (17.12) erfüllt. //