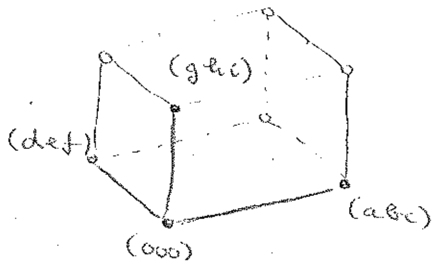
Klopsch

§ 16 Determinanten

Motivation 2×2 und 3×3 Determinanten

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$



$$\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{array}{l} aei + bfg + cdh \\ - afh - bdi - ceg \end{array}$$

spielen zB bei der Flächen- bzw Volumenbestimmung im $\mathbb{R}^2$ bzw $\mathbb{R}^3$ eine wichtige Rolle.

GV $n \in \mathbb{N}_0$, K ein Körper

$$Id = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Einheitsmatrix (in } Mat_n(K))$$

$$e_{ij} = \begin{array}{c c} & j \\ i & \begin{pmatrix} & \boxed{1} \\ 0 & \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{Stand' basis des } K\text{-VR } Mat_n(K)$$

$E_{ij}(a) = Id + a\, e_{ij}$ für $i \neq j$ und $a \in K$
(Elementarmatrix)

$D_i(a) = Id + (a-1)\, e_{ii}$ für i und $a \in K^*$
(Diagonalmatrix)

$T_{ij} = Id - (e_{ii} + e_{jj}) + (e_{ij} + e_{ji})$. für $i \neq j$
(Tauschmatrix)

vgl Üb blatt 12

Merke: $E_{ij}(a), D_i(a), T_{ij} \in Gl_n(K)$

Multipl von links bzw rechts liefert entsprechende Zeilen- bzw Spaltenumformungen

(*) $T_{ij} = D_j(-1)\, E_{ij}(1)\, E_{ji}(-1)\, E_{ij}(1) = E_{ij}(1)\, E_{ji}(-1)\, E_{ij}(1)\, D_i(-1)$

Klopsch

(16.1) Def (Determinantenabb.)

Eine Determinantenabb auf $\mathrm{Mat}_n(K)$ ist eine Abb

$\delta : \mathrm{Mat}_n(K) \to K$ mit

(DET1) Für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ ist δ linear in der i-ten Zeile, dh

$$\delta\Big(\underbrace{\sum_{\substack{j,k \\ j \neq i}} a_{jk} e_{jk}}_{= A'} + \underbrace{\sum_k (b x_k + y_k) e_{ik}}_{i\text{-te Zeile}} \Big)$$

$$= b\, \delta\Big(A' + \underbrace{\sum_k x_k e_{ik}}_{i\text{-te Zeile}} \Big) + \delta\Big(A' + \underbrace{\sum_k y_k e_{ik}}_{i\text{-te Zeile}} \Big)$$

für alle $a_{jk}, b, x_k, y_k \in K$.

(DET2) Besitzt $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ zwei gleiche Zeilen, so gilt $\delta(A) = 0$. [δ ist alternierend]

(DET3) $\delta(\mathrm{Id}) = 1$ für die Einheitsmatrix Id.
[δ ist normiert]

(16.2) Lem: Sei $\delta : \mathrm{Mat}_n(K) \to K$ eine Detabb, und sei $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$. Dann gelten:

a) Besitzt A eine Nullzeile, so ist $\delta(A) = 0$.

b) $\delta(E_{ij}(c) A) = \delta(A)$ für $i \neq j$, $c \in K$
[Invarianz unter Zeilenumf vom Typ (ZU1); vgl (9.5)]

c) $\delta(D_i(c) A) = c\, \delta(A)$ für i, $c \in K^*$
[Zeilenumf vom Typ (ZU3)]

d) $\delta(T_{ij} A) = -\delta(A)$ für $i \neq j$
[Zeilenumf vom Typ (ZU2)]

Insbesondere gilt: Klopsch

$$\delta(E_{ij}(c))=1, \quad \delta(D_i(c))=c, \quad \delta(T_{ij})=-1.$$

Bew: a) Hat A eine Nullzeile, so liefert (DET1):

$\delta(A)=\delta(A)+\delta(A)$, also $\delta(A)=0$.

b) Schreibe $A=(a_{k\ell})$. (DET1) und (DET2) liefern:

$$\delta(E_{ij}(c)A) = \delta\Big(\sum_{\substack{k,\ell\\ k\neq i}} a_{k\ell}e_{k\ell} + \underbrace{\sum_k (a_{ik}+c\,a_{jk})e_{ik}}_{i\text{-te Zeile}}\Big)$$

$$= \delta(A) + c\,\delta\Big(\sum_{\substack{k,\ell\\ k\neq i}} a_{k\ell}e_{k\ell} + \underbrace{\sum_k a_{jk}e_{ik}}_{i\text{te Zeile, entspr } j\text{-ter Zeile}}\Big)$$

$$= \delta(A) + 0 = \delta(A).$$

c) folgt direkt aus (DET1).

d) folgt aus b), c) und ⊛ auf Seite 137. //

(16.3) Hilfssatz Sei $\delta: \mathrm{Mat}_n(K)\to K$ eine Detabb, und sei $A\in \mathrm{Mat}_n(K)$. Dann ist A invertierbar, dh $A\in GL_n(K)$, gdw $\delta(A)\neq 0$. Weiterhin gibt es neben δ keine weiteren Detabb $\mathrm{Mat}_n(K)\to K$.

Bewskizze: Nach Übblatt 12 (hier kurz erläutern!!!) → S. 139 b) läßt sich A durch Anwendung elementarer Zeilenumformungen auf reduzierte Zeilenstufenform A' bringen. Dabei gilt $\mathrm{Rang}(A)=\mathrm{Rang}(A')$, so daß $A\in GL_n(K) \leftrightarrow A'\in GL_n(K)$. Besitzt A' eine Nullzeile so liefert (16.2) induktiv $\delta(A)=\delta(A')=0$ und $A\notin GL_n(K)$. Andernfalls

Klopsch

zu (16.3) ; vgl. auch Üb-blatt 12

„... auf reduzierte Zeilenstufenform A´ bringen."

bedeutet : A´ erfüllt

(ZSF1) Ist eine Zeile von A´ von Null verschieden, so ist der erste von 0 verschiedene Eintrag in dieser Zeile gleich 1.

Die „Position" dieses Eintrags heißt Angelpunkt der Zeile.

(ZSF2) Von Null verschiedene Zeilen liegen allesamt oberhalb von Nullzeilen. Sind die ite und jte Zeile von Null verschieden, mit $i<j$, dann erscheint der Angelpunkt der jten Zeile in einer Spalte rechts von derjenigen des Angelpunktes der iten Zeile.

(ZSF3) Alle Einträge einer Spalte, in der ein Angelpunkt liegt, sind bis auf den Eintrag 1 im Angelpunkt selbst gleich 0.

Bspl

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & * & 0 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & - & - & - & - & - & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gilt $A' = Id$. Wegen $\delta(Id) = 1$ liefert Klopsch

(16.2) induktiv $\delta(A) \in K^*$ und als Produkt

von invertierbaren Matrizen der Gestalt $E_{ij}(c)$, $D_i(c)$,

T_{ij} ist $A \in Gl_n(K)$. Schließlich legt (16.2)

den Wert $\delta(A)$ induktiv auch eindeutig fest. //

Um die Existenz einer Detabb nachzuweisen, benötigen wir weitere Informationen zu der symmetrischen Gruppe $Sym(n)$; vgl (12.7) d).

(16.4) <u>Def</u> (Fehlstände, Signum)

Sei $\pi \in Sym(n)$ eine Permutation von $\{1, 2, .., n\}$.

Ein <u>Fehlstand</u> von π ist ein Indexpaar (i,j) mit $1 \le i < j \le n$ und $i\pi > j\pi$. Wir setzen

$$Fehl(\pi) = \{ (i,j) \mid (i,j) \text{ ein Fehlstand von } \pi \} \text{ und}$$

$$sgn(\pi) = (-1)^{\# Fehl(\pi)} \in \{1, -1\}, \text{ das } \underline{\text{Signum}} \text{ von } \pi.$$

<u>Merke</u>: $sgn(\pi)$ ist 1 bzw -1, je nachdem, ob die Anzahl der Fehlstände gerade oder ungerade ist.

(16.5) <u>Lem</u> (1) $sgn(id) = 1$ $[Fehl(id) = \emptyset]$

(2) $sgn(\tau) = -1$ für jede Transposition $\tau \in Sym(n)$.

<u>Bew</u>: (1) klar (2) Sei $\tau \in Sym(n)$ eine Transposition.

Dann gibt es $i \overset{<}{,} j \in \{1, .., n\}$, so daß

$$k\tau = \begin{cases} j & \text{falls } k = i \\ i & \text{falls } k = j \\ k & \text{andernfalls} \end{cases} \quad \text{für alle } k \in \{1, .., n\}.$$

Es gilt $Fehl(\tau) = \{ (i, i+1), (i, i+2), \dots, (i,j), (i+1, j), (i+2, j), \dots, (j-1, j) \}$, also

$\# \text{Fehl}(\tau) = (j-i) + (j-1-i) = 2(j-i)-1$ Klopsch

und $\text{sgn}(\tau) = (-1)^{2(j-i)-1} = -1$. //

(16.6) <u>Lem</u> Sei $\mathfrak{M}$ die Menge aller 2-elem Teilmengen von $\{1,2,\dots,n\}$, und sei $\pi \in \text{Sym}(n)$. Dann induziert π eine Bijektion

$$\mathfrak{M} \to \mathfrak{M}, \quad \{i,j\} \mapsto \{i\pi, j\pi\}, \qquad [\text{klar}]$$

und es gilt

$$\text{sgn}(\pi) = \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{j\pi - i\pi}{j-i} = \prod_{\{i,j\} \in \mathfrak{M}} \frac{j\pi - i\pi}{j-i}.$$

<u>Bew</u>: Für jedes $\{i,j\} \in \mathfrak{M}$ gilt

$$\frac{j\pi - i\pi}{j-i} = \frac{i\pi - j\pi}{i-j}, \qquad [\text{damit ist das zweite Produkt definiert}]$$

und die Elemente $\{i,j\}$ von $\mathfrak{M}$ lassen sich eindeutig durch Paare (i,j) mit $1 \le i < j \le n$ parametrisieren. Somit sind die beiden Produkte gleich.

Weiter gilt: $\prod_{1 \le i < j \le n} (j-i) = \prod_{\{i,j\} \in \mathfrak{M}} |j-i| =$ 24 25

$\prod_{\{i,j\} \in \mathfrak{M}} |j\pi - i\pi| = \left| \prod_{1 \le i < j \le n} (j\pi - i\pi) \right|$. Also unterscheiden sich $\prod_{1 \le i < j \le n} (j-i)$ und $\prod_{1 \le i < j \le n} (j\pi - i\pi)$ gerade um den Faktor $(-1)^{\# \text{Fehl}(\pi)} = \text{sgn}(\pi)$. //

(16.7) <u>Satz</u>: $\text{sgn}: \text{Sym}(n) \to \{1,-1\}$ ist ein Gruppenhomomorphismus, dh es gilt:

$$\forall\, \pi, \rho \in \text{Sym}(n): \quad \text{sgn}(\pi\rho) = \text{sgn}(\pi)\, \text{sgn}(\rho).$$

Klopsch

<u>Bew</u> Gemäß (16.6) gilt:

$$\operatorname{sgn}(\pi\rho) = \prod_{\{i,j\}\in\mathfrak{M}} \frac{j\pi\rho - i\pi\rho}{j-i} = \prod_{\{i,j\}\in\mathfrak{M}} \frac{j\pi - i\pi}{j-i} \cdot \underbrace{\frac{j\pi\rho - i\pi\rho}{j\pi - i\pi}}_{= \frac{(j\pi)\rho - (i\pi)\rho}{j\pi - i\pi}}$$

$$= \operatorname{sgn}(\pi)\ \operatorname{sgn}(\rho). \ //$$

(16.8) <u>Satz / Def</u>: Die Menge

$\operatorname{Alt}(n) = \{\alpha \in \operatorname{Sym}(n) \mid \operatorname{sgn}(\alpha) = 1\}$ bildet eine Untergruppe von $\operatorname{Sym}(n)$, die <u>alternierende Gruppe vom Grad n</u>.

Für $n \geq 2$ und $\rho \in \operatorname{Sym}(n) \setminus \operatorname{Alt}(n) = \{\pi \in \operatorname{Sym}(n) \mid \operatorname{sgn}(\pi) = -1\}$ sind

$$\operatorname{Alt}(n) \longrightarrow \operatorname{Sym}(n) \setminus \operatorname{Alt}(n), \quad \alpha \mapsto \alpha\rho$$
$$\operatorname{Alt}(n) \longrightarrow \operatorname{Sym}(n) \setminus \operatorname{Alt}(n), \quad \alpha \mapsto \rho\alpha$$

jeweils bijektiv.

<u>Bem</u>: $\operatorname{Alt}(n)$ hat zwei Nebenklassen in $\operatorname{Sym}(n)$; vgl Üb-Blatt 9.

<u>Bew</u>: leichte Rechnung mittels (16.7). //

(16.9) <u>Satz / Def</u> Es gibt genau eine Detabb auf $\operatorname{Mat}_n(K)$, nämlich $\det : \operatorname{Mat}_n(K) \to K$

$$A = (a_{ij}) \mapsto \sum_{\sigma \in \operatorname{Sym}(n)} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,i\sigma}$$

Bspe: 2×2, 3×3 wie auf S. 137

[<u>Leibniz-Formel</u>]

Oft schreibt man auch $|A|$ für $\det(A)$.

<u>Bew</u> Wegen (16.3) ist nur zz, daß det tatsächlich eine Detabb ist.

(DET1) Jeder Summand enthält genau einen Eintrag der i-ten Zeile von A als Faktor.

Klopsch:

Daher ist det linear in der i-ten Zeile.

(DET2) Seien k-te und l-te Zeile von A gleich, für $k \neq l$. Bezeichne mit $\tau \in \mathrm{Sym}(n)$ die Transposition, die k und l vertauscht. Nach (16.8) ist

$$\mathrm{Sym}(n) = \mathrm{Alt}(n) \,\dot\cup\, \tau\,\mathrm{Alt}(n) \qquad \text{[disjunkte Vereinigung]},$$

also

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathrm{Sym}(n)} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_i a_{i,i\sigma}$$

$$= \sum_{\alpha \in \mathrm{Alt}(n)} \cancel{\mathrm{sgn}(\alpha)}^{=1} \prod_i a_{i,i\alpha} + \sum_{\alpha \in \mathrm{Alt}(n)} \overbrace{\mathrm{sgn}(\tau\alpha)}^{=-1} \prod_i a_{i,i\tau\alpha}$$

k-te Zeile = l-te Zeile

$$= \sum_\alpha \prod_i a_{(i\tau), i\alpha} - \sum_\alpha \prod_j a_{j\tau,(j\tau)\tau\alpha}$$

$$[\tau\tau = id]$$

$$= \sum_\alpha \prod_i a_{i\tau, i\alpha} - \sum_\alpha \prod_j a_{j\tau, j\alpha} = 0. \quad //$$

(DET3) Für die Einheitsmatrix Id gilt:

$$\det(Id) = \sum_\sigma \mathrm{sgn}(\sigma) \cdots = \underbrace{1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1}_{\sigma = id} + \underbrace{0 + \ldots + 0}_{\sigma \neq id} = 1. \quad //$$

(16.10) <u>Satz</u> Sei $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_n(K)$ und
$A^{tr} = (a_{ji}) \in \mathrm{Mat}_n(K)$ die Transponierte; vgl (15.1).
Dann gilt $\det(A) = \det(A^{tr})$.

<u>Bew</u> Schreibe $\tilde a_{ij} = a_{ji}$, so daß $A^{tr} = (\tilde a_{ij})$.

Merke: (i) Mit $\sigma \in \mathrm{Sym}(n)$ durchläuft auch σ^{-1} die Elemente von $\mathrm{Sym}(n)$, (ii) $\mathrm{sgn}(\sigma) = \mathrm{sgn}(\sigma^{-1})$ für jedes $\sigma \in \mathrm{Sym}(n)$ wegen (16.8).

Die Leibniz-Formel liefert daher:

$$\det(A) = \sum_\sigma \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_i a_{i,i\sigma} \underset{(ii)}{=} \sum_\sigma \mathrm{sgn}(\sigma^{-1}) \prod_i a_{i\sigma^{-1},i} \qquad \text{[ersetze } \sigma^{-1} \text{ durch } \sigma\text{]}$$

$$\underset{(i)}{=} \sum_\sigma \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_i \tilde a_{i,i\sigma} = \det(A^{tr}). \quad //$$

Klopsch

<u>Folgerung</u>: Eine leichte Rechnung zeigt, daß für $A, B \in \mathrm{Mat}_n(K)$ gilt: $(AB)^{tr} = B^{tr} \cdot A^{tr}$. [Übung!]

Der Satz impliziert, daß die Rechenregeln (DET1), (DET2) sowie die Aussagen in (16.2) ganz entsprechend auch für Spalten statt Zeilen gelten.

(16.11) <u>Determinantenmultiplikationssatz</u>

Seien $A, B \in \mathrm{Mat}_n(K)$. Dann gilt:

$$\det(AB) = \det(A) \det(B).$$

Insb ist $\det|_{\mathrm{GL}_n(K)} : \mathrm{GL}_n(K) \to K^*$ ein Gruppenhomomorphismus.

<u>Bew</u>: <u>1. Fall</u>: $\det(AB) = 0$. Nach (16.3) ist $AB \notin \mathrm{GL}_n(K)$, also $A \notin \mathrm{GL}_n(K)$ oder $B \notin \mathrm{GL}_n(K)$, also $\det(A) = 0$ oder $\det(B) = 0$, und daher $\det(AB) = 0 = \det(A)\det(B)$.

<u>2. Fall</u>: $\det(AB) \neq 0$. Dann ist $AB \in \mathrm{GL}_n(K)$, also $\mathrm{Rang}(AB) = n$. Offenbar gilt

$$\text{Zeilenrang}(AB) \leq \text{Zeilenrang}(B) \quad \text{und}$$
$$\text{Spaltenrang}(AB) \leq \text{Spaltenrang}(A).$$

Somit ist $n = \mathrm{Rang}(AB) \leq \mathrm{Rang}(A) \leq n$, also $\mathrm{Rang}(A) = n$, und ebenso $\mathrm{Rang}(B) = n$. Das ergibt $A, B \in \mathrm{GL}_n(K)$.

Wie bereits im Beweis von (16.3) verwendet, gilt daher

$$A = C_1 \cdots C_r, \quad B = D_1 \cdots D_s,$$

wobei $r, s \in \mathbb{N}_0$ und $C_k, D_\ell \in \mathrm{GL}(K)$ jeweils von der Gestalt $E_{ij}(c)$ für $i \neq j$, $c \in K$ oder $D_i(c)$ für i, $c \in K^*$ sind

Per Induktion nach r bzw s bzw $r+s$ liefert   Klopsch

(16.2) daher:

$$\det(A) = \prod_{k=1}^{r} \det(C_k) \quad , \quad \det(B) = \prod_{\ell=1}^{s} \det(D_\ell)$$

und $\det(AB) = \prod_{k=1}^{r} \det(C_k) \prod_{\ell=1}^{s} \det(D_\ell) = \det(A)\det(B).$ //

(16.12) <u>Def</u> (komplementäre Matrix)

Für $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_n(K)$ und $i,j \in \{1,\dots,n\}$ setze

$$A_{ij}^{[z]} = \sum_{\substack{k,\ell \\ k \neq i}} a_{k\ell} e_{k\ell} + \underbrace{e_{ij}}_{\text{i-te Zeile durch } (0\dots 0 \overset{j}{1} 0 \dots 0) \text{ ersetzt}}$$

$$A_{ij}^{[s]} = \sum_{\substack{k,\ell \\ \ell \neq j}} a_{k\ell} e_{k\ell} + \underbrace{e_{ij}}_{\text{j-te Spalte durch } \begin{array}{c} \\ i\to \end{array}\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ersetzt}}$$

$$A_{ij}^{[zs]} = \sum_{\substack{k,\ell \\ k\neq i, \ell \neq j}} a_{k\ell} e_{k\ell} + \underbrace{e_{ij}}_{\text{i-te Zeile \& j-te Spalte ersetzt}}$$

Weiterhin sei $A_{ij}^{\#} \in \mathrm{Mat}_{n-1}(K)$ diejenige Matrix, die aus A durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte gewonnen wird.

Die zu A <u>komplementäre Matrix</u> ist

$$\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij}) \in \mathrm{Mat}_n(K) \quad \text{mit} \quad \tilde{a}_{ij} = \det A_{ji}^{[zs]}$$

(16.13) <u>Lem</u> Für $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ und $i,j \in \{1,\dots,n\}$ gilt:

a) $\det A_{ij}^{[zs]} = \det A_{ij}^{[z]} = \det A_{ij}^{[s]}$

b) $\det A_{ij}^{[zs]} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}^{\#}$

Klopsch

Bew: a) Offenbar erhält man $A_{ij}^{[Z]}$ bzw $A_{ij}^{[S]}$ jeweils durch geeignete Zeilen- bzw Spaltenumformungen vom Typ (ZU1)/(SU1) aus $A_{ij}^{[ZS]}$. Nach (16.2) b) bleibt die Determinante dabei unverändert.

b) Schrittweise Vertauschung der Zeilenpaare $(i,i+1)$, $(i+1,i+2), \dots, (n-1,n)$ und der Spaltenpaare $(j,j+1)$, $(j+1,j+2), \dots, (n-1,n)$ überführt $A_{ij}^{[ZS]}$ in die Matrix $\left(\begin{array}{c|c} A_{ij}^{\#} & \begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix} \\ \hline 0 \cdots & 1\end{array}\right)$. Insgesamt benötigen wir dabei

$(n-i)+(n-j) = 2n-(i+j)$ Vertauschungen. Mit Hilfe der Leibniz-Formel erhalten wir so

$$\det A_{ij}^{[ZS]} = (-1)^{2n-(i+j)} \det\left(\begin{array}{c|c} A_{ij}^{\#} & \\ \hline & 1\end{array}\right) = (-1)^{i+j} \det A_{ij}^{\#}. \ //$$

(16.14) **Hilfsatz** Sei $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ mit komplementärer Matrix $\tilde{A} \in \mathrm{Mat}_n(K)$. Dann gilt

$$\tilde{A} A = A \tilde{A} = \det(A) \cdot \mathrm{Id}.$$

25/26

Bew: Schreibe $\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & i=k \\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$ [Kronecker-Delta]

Für $i,k \in \{1,..,n\}$ ist der (i,k)-Eintrag von $\tilde{A}A$ gleich $\sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} a_{jk} = \sum_j a_{jk} (\det A_{ji}^{[ZS]})$

$$\underset{(16.13)}{=} \sum_j a_{jk} (\det A_{ji}^{[S]})$$

Linearität in der i-ten Spalte; siehe Folgerung zu (16.10)

$$= \sum_j \det \begin{array}{c} \quad i \\ \left(\begin{array}{c|c|c} \square & \begin{matrix}0\\ \vdots\\ \boxed{a_{jk}}\\ \vdots\\ 0\end{matrix} & \square \end{array}\right) \end{array} \leftarrow j$$

$$= \det\left(\begin{array}{c|c|c} \square & \begin{matrix}a_{1k}\\ \vdots\\ a_{nk}\end{matrix} & \square \end{array}\right) = \delta_{ik} \det(A).$$

i-te Spalte durch k-te Spalte ersetzt

Somit ist $\tilde{A}A = \det(A) \cdot \mathrm{Id}$.

Ähnlich gilt für $i,k \in \{1,\dots,n\}$: Der (i,k)-Eintrag von $A\tilde{A}$ ist gleich

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\tilde{a}_{jk} = \sum_j a_{ij} \left(\det A_{kj}^{[25]}\right)$$

$$\underset{(16.13)}{=} \sum_j a_{ij} \left(\det A_{kj}^{[2]}\right)$$

Linearität in der k-ten Zeile

$$= \sum_j \det \begin{array}{c} \overset{j}{\downarrow} \\ \begin{pmatrix} \quad \\ \hline 0 \cdots 0 \ \boxed{a_{ij}} \ 0 \cdots 0 \\ \hline \quad \end{pmatrix} \end{array} \leftarrow k$$

$$= \det \begin{pmatrix} \quad \\ \hline a_{i1} \ \cdots \ a_{in} \\ \hline \quad \end{pmatrix} \leftarrow k \quad = \delta_{ik} \det(A).$$

Somit ist auch $A\tilde{A} = \det(A) \cdot \mathrm{Id}$. //

(16.15) <u>Korollar</u> Für $A \in GL_n(K)$ gilt $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \tilde{A}$.

<u>Bspl</u> Für $a,b,c,d \in K$ mit $ad - bc \neq 0$ ist

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

(16.16) <u>Entwicklungssatz von Laplace</u>

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{vmatrix}$$ Bspl $n=4$

Sei $n \geq 2$ und $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_n(K)$. Dann gilt:

- für $i \in \{1,\dots,n\}$: $\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}^{\#}$

  [Entwicklung nach i-ter Zeile]

- für $j \in \{1,\dots,n\}$: $\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}^{\#}$

  [Entwicklung nach j-ter Spalte]

$\rightsquigarrow$ induktives Verfahren zur Berechnung von Determinanten

Klopsch

<u>Bew</u> Nach (16.14) ist für $i \in \{1,\dots,n\}$ der (i,i)-Eintrag von $A\tilde{A}$ gleich $\det(A)$. Also gilt

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\tilde{a}_{ji} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \det A_{ij}^{[25]}$$

$$\underset{(16.13)}{=} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} (-1)^{i+j} \det A_{ij}^{\#}.$$

Ähnlich ist für $j \in \{1,\dots,n\}$ der (j,j)-Eintrag von $\tilde{A}A$ gleich $\det(A)$. Also gilt

$$\det(A) = \sum_i \tilde{a}_{ji} a_{ij} = \sum_i a_{ij} \det A_{ij}^{[25]}$$

$$= \sum_i a_{ij} (-1)^{i+j} \det A_{ij}^{\#}. \quad //$$

<u>Bspl</u>:
$$\begin{vmatrix} 0 & 7 & -1 \\ 3 & 10 & -5 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \begin{vmatrix} 10 & -5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 10 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= -3(21+2) = -69.$$

(16.17) <u>Cramersche Regel</u>

Ein Gleichungssystem mit n lin Gl in n Unbest können wir als Matrixgleichung

$$(*) \quad A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{array}{l} A \in \mathrm{Mat}_n(K) \\ b \in \mathrm{Mat}_{n,1}(K) \cong K^n \end{array}$$

schreiben.

Setzt man $\mathrm{Rang}(A) = n$, dh $A \in GL_n(K)$, voraus, so hat $(*)$ eine eindeutige Lösung, nämlich

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \tilde{A} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Hierbei ist

$$x_i = \frac{1}{\det(A)} \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} b_j = \frac{1}{\det(A)} \sum_j b_j \det A_{ji}^{[25]}$$

Klopsch

$$\underset{(16.13)}{=} \frac{1}{\det(A)} \sum_j b_j \det A_{ji}^{[S]}$$

$$= \frac{\sum_j \det\left(\begin{array}{c|c|c} \boxed{} & \begin{matrix}\vdots\\ b_j\\ \vdots\end{matrix} & \boxed{}\end{array}\right)}{\det(A)} = \frac{\det\left(\begin{array}{c|c|c} \boxed{} & \overset{\downarrow i}{\begin{matrix} b_1\\ \vdots\\ b_n\end{matrix}} & \boxed{}\end{array}\right)}{\det(A)}.$$

Dies ist die sogenannte Cramersche Regel;
vgl Üb-aufg 1.8 [n=2]:

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases} \quad \text{mit} \quad ad - bc \neq 0$$

$\rightsquigarrow$ eindeutige Lösung

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} e \\ f \end{matrix}} & \begin{matrix} b \\ d \end{matrix} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} \begin{matrix} a \\ c \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} e \\ f \end{matrix}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$