Klopsch

§15 Matrixbeschreibung linearer Abbildungen

GV. U, V, W endl dimnl VR über einem Körper K

$\dim U = l$, $\dim V = m$, $\dim W = n$

$\mathcal{U} = (u_1, \dots, u_l)$, $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_m)$, $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_n)$

geordnete Basen von U, V, W

(15.1) Def (Matrizen)

a) Eine Abb $T : \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\} \to K$ heißt $m \times n$ Matrix über K. Das Bild von (i,j) unter T schreiben wir zweckmäßigerweise als t_{ij}, und $T = (t_{ij})$ als rechteckiges Schema

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ t_{21} & & & \vdots \\ \vdots & & & \\ t_{m1} & & \cdots & t_{mn} \end{pmatrix}$$ mit m Zeilen und n Spalten.

b) Die Menge $\mathrm{Mat}_{m,n}(K)$ aller $m \times n$ Matrizen über K ist also gleich

$$\mathrm{Abb}(I, K) = K^I = K^{(I)} \quad \text{für } I = \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}.$$

Gemäß (4.9) ist $\mathrm{Mat}_{m,n}(K)$ also ein K-VR bzgl der eintragsweise def Verknüpfungen

- Addition von $S = (s_{ij})$, $T = (t_{ij})$:

  $S + T = (s_{ij} + t_{ij})$

- skalare Multipl von $a \in K$ mit $T = (t_{ij})$:

  $aT = (a t_{ij})$

Die <u>Nullmatrix</u> ist die Null bzgl +, mit allen Einträgen gleich 0.

c) Formal unterscheiden wir zwischen

K^m	$Mat_{1,m}(K)$	$Mat_{m,1}(K)$
„<u>Standardvektoren</u>"	„<u>Zeilenvektoren</u>"	„<u>Spaltenvektoren</u>"
$(x_1, \dots, x_m)$	$(x_1 \; \dots \; x_m)$	$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$

,

aber natürlich gilt $K^m \cong Mat_{1,m}(K) \cong Mat_{m,1}(K)$
(als K-VR).

22
23

Die <u>Transponierte</u> einer Matrix $T = (t_{ij})_{ij} \in Mat_{m,n}(K)$ ist die Matrix $T^{tr} = (t_{ji})_{ij} \in Mat_{n,m}(K)$.
Diese Operation hilft zB, zwischen Zeilen- und Spaltenvektoren zu übersetzen (siehe unten).

(15.2) <u>Def</u> (Koordinatenmatrix einer lin Abb)

Sei $\tau : V \to W$ eine lin Abb. Die <u>Koordinatenmatrix</u> von τ bzgl der Basen $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ ist die Matrix

$$[\tau]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = T = (t_{ij}) \in Mat_{m,n}(K),$$

die durch

$$\begin{aligned} v_1\tau &= \boxed{t_{11}}\, w_1 + \dots + \boxed{t_{1n}}\, w_n \\ &\;\;\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ v_m\tau &= \boxed{t_{m1}}\, w_1 + \dots + \boxed{t_{mn}}\, w_n \end{aligned}$$

bestimmt ist.

Gemäßt (14.13) bestimmt umgekehrt $[\tau]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ eindeutig die lin Abb $\tau : V \to W$. Die Zeilen legen die Bilder $v_1\tau, \dots, v_m\tau$ der Basisvektoren fest.

<u>Kurz</u>: $Hom(V,W) \cong Mat_{m,n}$ als K-VR.

Klopsch

<u>Bew</u>: Für $v = \sum_{i=1}^{m} x_i v_i \in V$ gilt

$$v\tau = \left(\sum_i x_i v_i\right)\tau = \sum_i x_i (v_i \tau)$$

$$\overset{(*)}{=} \sum_i x_i \sum_j t_{ij} w_j = \sum_j \left(\sum_i x_i t_{ij}\right) w_j . \quad //$$

<u>Notation</u> Ist speziell $\tau : V \to V$ ein Endomorphismus, so sehen wir

$$[\tau]_{\mathcal{B}} := [\tau]_{\mathcal{B}\mathcal{B}} . \qquad [\rightsquigarrow \S 17]$$

(15.3) <u>Def</u> (Matrizenmultiplikation)

Das <u>Produkt</u> von $S = (s_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{\ell,m}(K)$ und $T = (t_{jk}) \in \mathrm{Mat}_{m,n}(K)$ ist die $\ell \times n$ Matrix

$$S \cdot T = \begin{array}{c|c} & k \in \{1,\dots,n\} \\ \hline i \in \{1,\dots,\ell\} & \left(\underbrace{\boxed{s_{i1}t_{1k} + s_{i2}t_{2k} + \dots + s_{im}t_{mk} = \sum_{j=1}^{m} s_{ij} t_{jk}}}_{(i,k)\text{-Eintrag}} \right) \end{array}$$

„Multipliziere die i-te Zeile von S gegen die k-te Spalte von T"

<u>Bem</u>: (*) entspricht dem Spezialfall $\ell = 1$ und $S = (x_1 \ \dots \ x_m)$, T wie dort angegeben.

Klopsch

(15.4) **Def** (Zeilen- und Spaltenrang)

Sei $T = (t_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{m,n}(K)$. Bezeichne mit

$$Z_i = (t_{i1}, \dots, t_{in}) \in K^n, \quad i \in \{1, \dots, m\},$$

die zu T gehörigen Zeilenvektoren und mit

$$S_j = (t_{1j}, \dots, t_{mj}) \in K^m, \quad j \in \{1, \dots, n\},$$

die zu T gehörigen Spaltenvektoren (als Elemente in K^n bzw K^m).

Dann heißen

$$\mathrm{Rang}(Z_1, \dots, Z_m) = \dim \underbrace{\langle Z_1, \dots, Z_m \rangle}_{\subseteq K^n}$$

und

$$\mathrm{Rang}(S_1, \dots, S_n) = \dim \underbrace{\langle S_1, \dots, S_n \rangle}_{\subseteq K^m}$$

der Zeilen- bzw Spaltenrang von T.

Bem: Die Bestimmung des Zeilenrangs mit Hilfe von elem. Zeilenumformungen wurde in § 9 untersucht. Wir wollen nun den Zusammenhang zum Spaltenrang klären.

(15.5) **Def** (Standardbilinearform) [aus LA II]

Sei $V = K^m$ der Standardvektorraum.

Die Abb $K^m \times K^m \longrightarrow K$,

$$((x_1, \dots, x_m), (y_1, \dots, y_m)) \mapsto (x_1, \dots, x_m) \circ (y_1, \dots, y_m) = \sum_{i=1}^{m} x_i y_i$$

heißt <u>Standard bilinearform</u> auf $V = K^{m}$; Klopsch

vgl (15.6) unten.

Sind $v, w \in V$ mit $v \cdot w = 0$, so sagen wir, v steht <u>senkrecht</u> auf w, i.Z. $v \perp w$.

Für $M \subseteq V$ setzen wir

$$M^{\perp} = \{ w \in V \mid \forall v \in M : v \perp w \}.$$

(15.6) <u>Lemma</u> (Eigensch der Stand' Bilinearform)

Sei $V = K^{m}$ der Standardvektorraum, ausgestattet mit der Standardbilinearform. Dann gelten:

a) $\forall\, v, w \in V : v \cdot w = w \cdot v$; insb gilt
$\forall\, v, w \in V : v \perp w \Leftrightarrow w \perp v$.

b) $\forall\, a \in K\ \forall\, u, v, w \in V : (au + v) \cdot w$
$= a(u \cdot w) + (v \cdot w)$

„$\cdot$ ist eine symmetr Bilinearform auf V"

c) Für $M \subseteq N \subseteq V$ ist $M^{\perp} \supseteq N^{\perp}$. „<u>Senkrechtraum</u>"

d) Für $M \subseteq V$ ist $M^{\perp}$ ein Untervektorraum von V.

e) Für $M \subseteq V$ ist $M^{\perp} = \langle M \rangle^{\perp}$. $[\overset{\downarrow}{=} \langle M^{\perp} \rangle]$

<u>Bew</u>: Übung. //

(15.7) <u>Lemma</u>

Sei $V = K^{m}$ der Stand' vek'raum, ausgestattet mit der Stand' Bil' form.

Klopsch

Sei $k \in \{0, 1, \ldots, m\}$ und U ein k-dim'ler Unterraum von V, mit einer Basis, die bzgl der Stand' basis $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_m)$ von V die Koordinatenmatrix

$$k \left\{ \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{matrix}}_{k} \middle| \underbrace{\begin{matrix} a_{1,k+1} & a_{1,k+2} & \cdots & a_{1,m} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{k,k+1} & \cdots & \cdots & a_{k,m} \end{matrix}}_{m-k} \right) \right.$$

$$= \left(\begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} \middle| A \right) \in \mathrm{Mat}_{k,m}(K)$$

habe.

[dh, die k Vektoren

$$e_i + \sum_{j=k+1}^{m} a_{ij} e_j \quad , \quad 1 \leq i \leq k,$$

bilden eine Basis für U]

Dann ist $U^\perp$ ein $(m-k)$-dim'ler Unterraum von V, mit einer Basis, die bzgl $\mathcal{E}$ die Koordinatenmatrix

$$m-k \left\{ \left(\underbrace{\begin{matrix} -a_{1,k+1} & \cdots & -a_{k,k+1} \\ -a_{1,k+2} & & \vdots \\ \vdots & & \\ -a_{1,m} & \cdots & -a_{k,m} \end{matrix}}_{k} \middle| \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{matrix}}_{m-k} \right) \right.$$

$$= \left(-A^{tr} \middle| \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} \right) \in \mathrm{Mat}_{m-k,m}(K)$$

besitzt.

<u>Bewskizze</u>: Man rechnet direkt sehr leicht nach, daß die Zeilenvektoren der

ersten Matrix ($\rightsquigarrow$ Basisvektoren für U) senkrecht auf denjenigen der zweiten Matrix stehen. In Anbetracht der in (15.6) gesammelten Eigensch der Stand Bil form genügt es dann, zu beobachten: Aus

$$w = (w_1, \ldots, w_k, 0, \ldots, 0) \in U^\perp$$

folgt bereits $w_1 = \ldots = w_k = 0$, also $w = 0$. //

[Übung!]

(15.8) <u>Hilfssatz</u> (Dimensionsformel für Senkrechträume)

Sei $V = K^m$ der Stand vektorraum, ausgestattet mit der Stand bil form, und sei $U \leq V$ ein Untervektorraum. Dann gelten:

$$\boxed{\dim U + \dim U^\perp = \dim V} \quad \text{und} \quad (U^\perp)^\perp = U.$$

<u>Bew</u>: Die zweite Behauptung ergibt sich aus der Dimensionsformel: Aus $U \subseteq (U^\perp)^\perp$ [offensichtlich!] und

$$\dim U \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Formel für } U}}{=} \dim V - \dim U^\perp \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Formel für } U^\perp \text{ anstelle} \\ \text{von } U}}{=} \dim (U^\perp)^\perp$$

folgt $U = (U^\perp)^\perp$.

Für Unterräume U, die eine Basis wie in (15.7) besitzen, wurde die Dimensionsformel dort bereits implizit mitbewiesen.

Klopsch

Da die Stand'bil'form offenbar invariant unter Koordinatenvertauschungen (der Umnumerierung der Stand'basisvektoren) ist, zeigt (9.7), daß sich der allgemeine Fall auf den in (15.7) behandelten Spezialfall zurückführen läßt. //

(15.9) <u>Satz/Def</u> Sei $T \in \mathrm{Mat}_{m,n}(K)$. Dann ist der Zeilenrang von T gleich dem Spaltenrang von T und wird daher kurz der <u>Rang</u> von T, $\mathrm{Rang}(T)$, genannt.

<u>Bew</u>: Wir verwenden die Dimformeln für lin Abb (14.6) und für Senkrechträume (15.8). Sei $\vartheta : K^m \to K^n$ die lin Abb mit $[\vartheta]_{\text{Standbasen}} = T$. Nach (14.5) ist $\mathrm{Rang}(\vartheta) = \dim \mathrm{Bild}(\vartheta)$ gleich dem Zeilenrang r_Z von T. Nach (14.6) ist $\underline{\dim(\mathrm{Kern}\,\vartheta) = m - r_Z}$. Rüstet man K^m mit der Stand'bil'form aus, so gilt offenbar

$$\mathrm{Kern}(\vartheta) = \langle S_1, \ldots, S_n \rangle^\perp,$$

wobei $S_1, \ldots, S_n$ die Spalten von T (als Elmte von K^m) bezeichnen. Schreiben wir $r_S = \dim \langle S_1, \ldots, S_n \rangle$ für den Spaltenrang von T, so liefert (15.8):

$$\underline{\dim(\mathrm{Kern}\,\vartheta)} = \dim \langle S_1, \ldots, S_n \rangle^\perp = \underline{m - r_S}.$$

Das ergibt $m - r_Z = m - r_S$, also $r_Z = r_S$. //

Klopsch

(15.10) Beobachtung: Ist $\tau : V \to W$ linear und $T = [\tau]_{\mathcal{L},\mathcal{C}}$ die zugeh. Koord.matrix, so gilt $\text{Rang}(\tau) = \dim \text{Bild}(\tau) = \text{Rang}(T)$ und man kann $\text{Rang}(\tau)$ effektiv wie in § 9 besprochen berechnen.

(15.11) Hilfssatz (Interpretation der Matrizenmultipl.)

Seien $\sigma : U \to V$, $\tau : V \to W$ linear mit Koord.matrizen $[\sigma]_{\mathcal{D},\mathcal{L}} \in \text{Mat}_{\ell,m}(K)$, $[\tau]_{\mathcal{L},\mathcal{C}} \in \text{Mat}_{m,n}(K)$.

Dann ist $\sigma\tau : U \to W$ linear mit Koord.matrix $[\sigma\tau]_{\mathcal{D},\mathcal{C}} = [\sigma]_{\mathcal{D},\mathcal{L}} \cdot [\tau]_{\mathcal{L},\mathcal{C}}$.

Bew: Nachrechnen: Für $i \in \{1, \dots, \ell\}$ gilt

$$u_i(\sigma\tau) = (u_i\sigma)\tau = \left(\sum_{j=1}^{m} s_{ij} v_j\right)\tau$$

$$= \sum_{j=1}^{m} s_{ij} (v_j\tau) = \sum_{j=1}^{m} s_{ij} \sum_{k=1}^{n} t_{jk} w_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} s_{ij} t_{jk}\right) w_k ,$$

wobei $[\sigma]_{\mathcal{D},\mathcal{L}} = (s_{ij})$ und $[\tau]_{\mathcal{L},\mathcal{C}} = (t_{jk})$ gesetzt seien. //

(15.12) Korollar / Def: $\text{Mat}_m(K) = \text{Mat}_{m,m}(K)$ ist eine K-Algebra. Die Abb $\text{End}(V) \to \text{Mat}_m(K)$, $\tau \mapsto [\tau]_{\mathcal{L}}$ ist ein Isomorphismus von K-Algebren. Das Einselement von $\text{Mat}_m(K)$ ist dabei die $m \times m$. Einheitsmatrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Klopsch

Zu $GL(V) \subseteq End(V)$ korrespondiert die Einheitengruppe $GL_m(K) \subseteq Mat_m(K)$, die <u>allgemeine lineare Gruppe</u> vom Grad m. Es gilt:

$$\begin{aligned} GL_m(K) &= \{ A \in Mat_m(K) \mid A \text{ invertierbar in } Mat_m(K) \} \\ &= \{ A \in Mat_m(K) \mid \text{Rang}(A) = m \} \\ &= \{ [\alpha]_{\mathcal{B}} \mid \alpha \in GL(V) \}; \quad \text{vgl } (14.8). \end{aligned}$$

(15.13) <u>Def</u> Für $A = (a_{ij}) \in Mat_{m,n}(K)$ bezeichne

$$\mu_A : K^m \to K^n, \ (x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_1, \dots, x_m) A = \left(\sum_{j=1}^m x_j a_{j1}, \dots, \sum_{j=1}^m x_j a_{jn} \right)$$

die lin Abb zw Stand´vektorräumen, die durch Multiplikation mit A gegeben ist.

[Es gilt dann $[\mu_A]_{\text{Standbasen}} = A$.]

(15.14) <u>Hilfssatz</u> Sei $\alpha : V \to W$ linear und $A = [\alpha]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} \in Mat_{m,n}(K)$. Dann gilt

$\gamma_{\mathcal{B}} \mu_A \nu_{\mathcal{C}} = \alpha$.

Man sagt, das nebenstehende Diagramm kommutiert.

$$\begin{tikzcd} K^m \arrow[rr, "\mu_A : \underline{x} \mapsto \underline{x} A"] \arrow[d, shift left, "\gamma_{\mathcal{B}}"'] & & K^n \arrow[d, shift left, "\gamma_{\mathcal{C}}"'] \\ V \arrow[u, shift left, "\nu_{\mathcal{B}}"'] \arrow[rr, "\alpha"] & & W \arrow[u, shift left, "\nu_{\mathcal{C}}"'] \end{tikzcd}$$

<u>Bew</u>: Als Hintereinanderausführung von lin Abb ist $\gamma_{\mathcal{B}} \mu_A \nu_{\mathcal{C}} : V \to W$ selbst lin. Es genügt daher, zz,

daß $\gamma_{\mathcal{B}}\mu_A\nu_{\mathcal{C}}$ und α auf der Basis $\mathcal{B}$ übereinstimmen: Für jedes $i\in\{1,\dots,m\}$ gilt

$$v_i(\gamma_{\mathcal{B}}\mu_A\nu_{\mathcal{C}}) = ((v_i\gamma_{\mathcal{B}})\mu_A)\nu_{\mathcal{C}} =$$

$$\big((0,\dots,0,\underset{\substack{\uparrow\\ i}}{1},0,\dots,0)\,A\big)\,\nu_{\mathcal{C}} = (a_{i1},\dots,a_{in})\,\nu_{\mathcal{C}} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}w_j$$

$$= v_i\alpha. \quad //$$

(15.15) <u>Transformationsformel</u>

Sei $\alpha: V\to W$ lin und $A = [\alpha]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} \in \mathrm{Mat}_{m,n}(K)$.
Seien $\mathcal{B}' = (v_1',\dots,v_m')$, $\mathcal{C}' = (w_1',\dots,w_n')$ weitere Basen von V, W und $A' = [\alpha]_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'} \in \mathrm{Mat}_{m,n}(K)$.
Seien $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ die Standardbasen von K^m, K^n und setze

$$S = [\nu_{\mathcal{B}'}\gamma_{\mathcal{B}}]_{\mathcal{E}} \in \mathrm{GL}_m(K),$$
$$T = [\nu_{\mathcal{C}}\gamma_{\mathcal{C}'}]_{\mathcal{F}} \in \mathrm{GL}_n(K).$$

D.h. $S = (s_{ij})$ und $T = (t_{ij})$ haben die Eigenschaften

$$v_i' = s_{i1}v_1 + \dots + s_{im}v_m \qquad (1\le i\le m)$$
$$w_j = t_{j1}w_1' + \dots + t_{jn}w_n' \qquad (1\le j\le n)$$

und heißen Übergangsmatrizen von $\mathcal{B}'$ auf $\mathcal{B}$ bzw. $\mathcal{C}$ auf $\mathcal{C}'$.

Dann gilt

$$A' = SAT,$$

d.h. das nebenstehende Diagramm kommutiert.

$$\begin{tikzcd}
\overset{(\mathcal{B})}{K^m} \arrow[rrr, "\mu_A:\ \underline{x}\mapsto\underline{x}A"] & & & \overset{(\mathcal{C})}{K^n} \arrow[dl, "\nu_{\mathcal{C}}"'] \arrow[dd, "\mu_T:\ \underline{x}\mapsto\underline{x}T"] \\
& \boxed{V} \arrow[ul, "\gamma_{\mathcal{B}}"'] \arrow[r, "\alpha"] & \boxed{W} \arrow[dr, "\gamma_{\mathcal{C}'}"] & \\
\underset{(\mathcal{B}')}{K^m} \arrow[uu, "\mu_S:\ \underline{x}\mapsto\underline{x}S"] \arrow[ur, "\nu_{\mathcal{B}'}"] \arrow[rrr, "\mu_{A'}:\ \underline{x}\mapsto\underline{x}A'"'] & & & \underset{(\mathcal{C}')}{K^n}
\end{tikzcd}$$

Klopsch

Bem: Bei festem $\mathcal{B}$ durchläuft mit $\mathcal{B}'$ die Übergangsmatrix S eindeutig alle Elemente von $Gl_m(K)$. Ähnliches gilt für $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ und T in $Gl_n(K)$.

(15.16) **Def / Satz** Zwei Matrizen $A, B \in Mat_{m,n}(K)$ heißen **äquivalent**, falls (in Zeichen $A \sim B$)

$$B = SAT \quad \text{für geeignete } S \in Gl_m(K), T \in Gl_n(K).$$

Dies definiert eine Äquivalenzrel auf $Mat_{m,n}(K)$.

Bem Gemäß (15.15) entsprechen die Äquivalenzklassen gerade den „lin Abb $\alpha : V \to W$ bis auf Basiswechsel". Aus $A \sim B$ folgt stets $Rang(A) = Rang(B)$.

(15.17) **Satz** (1) Jede Matrix $A \in Mat_{m,n}(K)$ ist zu genau einer Matrix der Form

$$r\left\{\left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{matrix}}_{r} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)\right.$$

mit $0 \leq r \leq \min\{m,n\}$ äquivalent, und es gilt dann $Rang(A) = r$.

(2) Zwei Matrizen $A, B \in Mat_{m,n}(K)$ sind äquivalent gdw $Rang(A) = Rang(B)$ gilt.

Bew (1) Sei $A \in Mat_{m,n}(K)$ und $\alpha = \mu_A : K^m \to K^n$ mit $[\alpha]_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = A$ bzgl der Standartbasen $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ von K^m, K^n.

Der Beweis der Dim formel (14.6) zeigt, daß es Basen $\mathcal{E}' = (e_1', \dots e_r', e_{r+1}', \dots, e_m')$ von K^m und $\mathcal{F}' = (f_1', \dots, f_n')$ von K^n gibt mit:

$$r = \text{Rang}(A) = \text{Rang}(\alpha) = \dim \text{Bild}(\alpha) = m - \dim \text{Kern}(\alpha),$$

$$\langle e_{r+1}', \dots, e_m' \rangle = \text{Kern}(\alpha),$$

$$e_1' \alpha = f_1', \dots, e_r' \alpha = f_r'.$$

Das ergibt $A' = [\alpha]_{\mathcal{E}'\mathcal{F}'} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & 1 & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right)$.

Gemäß (15.15) gilt $A \sim A'$ und aufgrund des Ranges ist A' über den Parameter r dabei eind bestimmt.

(2) folgt unmittelbar aus (1). //

23 / 24

Für Endomorphismen verschiebt sich das Problem leicht, weil man sich bei der Basiswahl naturgemäß einschränkt.

(15.18) <u>Transformationsformel für Endomorphismen</u>

Sei $\alpha : V \to V$ ein und $A = [\alpha]_{\mathcal{B}} \in \text{Mat}_m(K)$.
Sei $\mathcal{B}'$ eine weitere geordn Basis von V und $\mathcal{E}$ die Standbasis des K^m. Setze

$$A' = [\alpha]_{\mathcal{B}'} \quad \text{und} \quad T = [\nu_{\mathcal{B}} \gamma_{\mathcal{B}'}]_{\mathcal{E}} \in GL_m(K)$$

(Übergangsmatrix von $\mathcal{B}$ auf $\mathcal{B}'$)

Dann gilt

$A' = T^{-1} A T$,

bildlich:

$$\begin{tikzcd}
K^m \arrow[rrr, "\mu_A"] & & & K^n \arrow[dl] \arrow[dd, "\mu_T"] \\
& V \arrow[ul] \arrow[r, "\alpha"] & V \arrow[dr] & \\
K^m \arrow[uu, "\mu_{T^{-1}} = \mu_T^{-1}"] \arrow[ur] \arrow[rrr, "\mu_{A'}"'] & & & K^n
\end{tikzcd}$$

bzgl $\mathcal{B}$

bzgl $\mathcal{B}'$

Klopsch.

<u>Bew</u>: Spezialfall von (15.15):

Merke, daß $S = [\iota_{\mathcal{B}'}\gamma_{\mathcal{B}}]_{\mathcal{E}} = [\gamma_{\mathcal{B}'}^{-1}\iota_{\mathcal{B}}^{-1}]_{\mathcal{E}}$

$$= [(\iota_{\mathcal{B}}\gamma_{\mathcal{B}'})^{-1}]_{\mathcal{E}} \underset{\uparrow}{=} [\iota_{\mathcal{B}}\gamma_{\mathcal{B}'}]_{\mathcal{E}}^{-1} = T^{-1}$$ ist. //

(15.8): $\mathrm{End}(V) \cong \mathrm{Mat}_n(K)$

(15.19) <u>Def/Satz</u> Zwei Matrizen $A, B \in \mathrm{Mat}_n(K)$ heißen <u>ähnlich</u>, falls (in Zeichen $A \approx B$)

$B = T^{-1}AT$ für geeignetes $T \in GL_n(K)$.

Dies definiert eine Äquivalenzrel auf $\mathrm{Mat}_n(K)$.

<u>Achtung</u>: $A \approx B \underset{i.a.}{\overset{\longrightarrow}{\not\longleftarrow}} A \sim B$; für Skalarmatrizen gilt

etwa $\begin{pmatrix} a & & \\ & \ddots & \\ & & a \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} b & & \\ & \ddots & \\ & & b \end{pmatrix}$ gdw $a = b$

$\begin{pmatrix} a & & \\ & \ddots & \\ & & a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} b & & \\ & \ddots & \\ & & b \end{pmatrix}$ gdw $\begin{cases} a = b = 0 \\ \text{oder} \\ a, b \neq 0 \end{cases}$.

<u>Normalformenproblem für Endomorphismen</u> $\leadsto$ LA II

[→ Jordansche Normalform ...]