Klopsch

Kapitel IV: Lineare Abbildungen und Matrizen

§ 14 Lineare Abbildungen

GV: Sei K ein Körper, und seien U, V, W K-VR.

(14.1) Def (lin Abb)

a) Eine Abb $\vartheta: V \to W$ heißt K-linear (oder Vektorraumhomomorphismus) falls gilt

(LA1) $\forall v_1, v_2 \in V: (v_1 + v_2)\vartheta = v_1\vartheta + v_2\vartheta$

(LA2) $\forall a \in K \; \forall v \in V: (av)\vartheta = a(v\vartheta)$

[zusammengefaßt:

- $\forall a \in K \; \forall v_1, v_2 \in V: (av_1 + v_2)\vartheta = a(v_1\vartheta) + v_2\vartheta$]

b) Eine lin Abb $\vartheta: V \to W$ heißt Monomorphismus (bzw Epimorphismus), falls ϑ injektiv (bzw surjektiv auf W) ist.

c) Eine lin Abb $\vartheta: V \to W$ heißt Isomorphismus, falls ϑ bijektiv (und $\vartheta^{-1}: W \to V$ ebenfalls linear) ist!. Letzteres ist stets automatisch erfüllt; vgl (12.2).

Gibt es einen Isomorphismus von V auf W, so sagen wir V und W sind isomorph, $V \cong W$.

Klopsch

d) Lineare Abb von V in sich heißen <u>Endomorphismen</u>.

e) Wir schreiben:

$$\mathrm{Hom}_K(V,W) = \{ \vartheta \mid \vartheta : V \to W \text{ linear} \}$$

$$\mathrm{End}_K(V) = \mathrm{Hom}_K(V,V)$$

$$GL(V) \doteq \{ \vartheta \in \mathrm{End}(V) \mid \vartheta \text{ Isomorphismus} \}$$

(14.2) <u>Bsple</u> [konkret zB $K = \mathbb{R}$]

a) Für jedes $a \in K$ ist

$$\mu_a : V \to V, \quad v \mapsto av$$

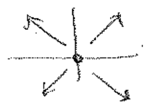
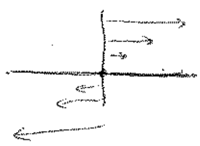
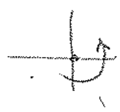
ein Endomorphismus von V, die durch $a \in K$ vermittelte <u>Homothetie</u> („Streckung mit Faktor a")

b) Sei $V = K^m$, $W = K^n$ und seien $a_{ij} \in K$ $(1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n)$. Dann ist

$$\alpha : V \to W, \quad (x_1, \dots, x_m) \mapsto \left(\sum_{i=1}^{m} x_i a_{i1}, \dots, \sum_{i=1}^{m} x_i a_{in} \right)$$

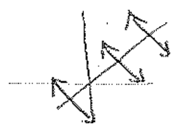
linear.

Konkret lassen sich für $V = W = \mathbb{R}^2$ viele geometrisch interessante Abb so beschreiben:

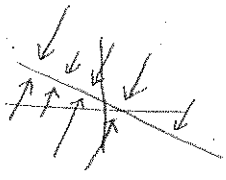
- Streckungen  (Zentrum im Ursprung)
- Scherungen  (Zentrum im Ursprung)
- Drehungen um den Ursprung 

Klopsch

- Spiegelungen an Geraden durch den Ursprung



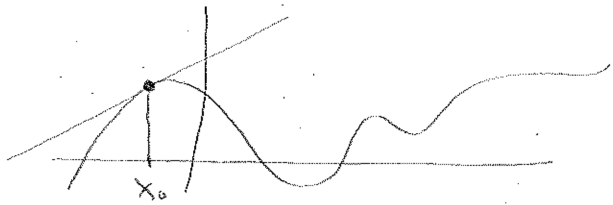
- Projektionen auf Geraden durch den Ursprung



→ 21/22

c) Die Ableitung einer diff'baren Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an einer Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ liefert eine Approximation von f nahe x_0 durch eine lin Abb:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)\cdot h}_{\text{linear; siehe a)}} + g(h)\,h \quad \text{mit } \lim_{h\to 0} g(h) = 0$$



(14.3) Def / Satz (Kern und Bild)

Sei $\vartheta: V \to W$ linear. Dann heißen

$\mathrm{Kern}(\vartheta) = \{ v \in V \mid v\vartheta = 0 \}$ der Kern und

$\mathrm{Bild}(\vartheta) = \{ w \in W \mid \exists v \in V : v\vartheta = w \}$

$= \{ v\vartheta \mid v \in V \}$ das Bild von ϑ.

$\mathrm{Kern}(\vartheta)$ ist ein Unterraum von V,

$\mathrm{Bild}(\vartheta)$ ist ein Unterraum von W.

Für $v_1, v_2 \in V$ gilt: $v_1\vartheta = v_2\vartheta$ gdw v_1 und v_2 repräsentieren dieselbe Nebenklasse von $\mathrm{Kern}(\vartheta)$ in V, dh $v_1 + \mathrm{Kern}(\vartheta) = v_2 + \mathrm{Kern}(\vartheta)$.

[$v_1 + \mathrm{Kern}(\vartheta) = \{ v_1 + u \mid u \in \mathrm{Kern}(\vartheta) \}$]

Klopsch

<u>Bew</u>: Daß Kern und Bild Untervektorräume bilden, ergibt sich leicht mit dem Kriterium (5.2).

Seien $v_1, v_2 \in V$. Dann gilt:

$$v_1\vartheta = v_2\vartheta \iff v_1\vartheta - v_2\vartheta = 0 \iff (v_1 - v_2)\vartheta = 0$$

$$\iff v_1 - v_2 \in \mathrm{Kern}(\vartheta)$$

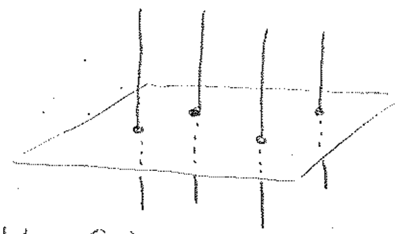
$$\iff v_1 + \mathrm{Kern}(\vartheta) = v_2 + \mathrm{Kern}(\vartheta). \quad //$$

<u>Bspe</u>: $V = W = \mathbb{R}^3$ über $K = \mathbb{R}$

$\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y,z) \mapsto (x,y,0)$ Projektion auf die (x,y)-Ebene

$\mathrm{Bild}(\pi) = \{ (x,y,0) \mid x,y \in \mathbb{R} \} \cong \mathbb{R}^2$

$\mathrm{Kern}(\pi) = \{ (0,0,z) \mid z \in \mathbb{R} \} \cong \mathbb{R}$



Faser von $(x_0, y_0, 0) \in \mathrm{Bild}(\pi)$:

$$\{ (x_0, y_0, z) \mid z \in \mathbb{R} \} = (x_0, y_0, 0) + \mathrm{Kern}(\pi)$$

(14.4) <u>Def</u> (Rang einer lin Abb)

Sei $\vartheta : V \to W$ eine lin Abb (zwischen endl dimensional VR). Der <u>Rang</u> von ϑ ist

$$\mathrm{Rang}(\vartheta) = \dim \mathrm{Bild}(\vartheta).$$

(14.5) <u>Lem</u>: Sei $V = \langle v_1, \ldots, v_m \rangle$ und $\vartheta : V \to W$ linear.

Dann gilt $\mathrm{Bild}(\vartheta) = \langle v_1\vartheta, \ldots, v_m\vartheta \rangle$ und folglich $\mathrm{Rang}(\vartheta) = \mathrm{Rang}(v_1\vartheta, \ldots, v_m\vartheta)$.

<u>Bew</u>: Die erste Beh ist eine leichte Übung, die zweite Beh folgt aus (10.11).

//

(14.6) Satz (Dimensionsformel für lin Abb)

Sei $\vartheta : V \to W$ eine lin Abb zw endl dimensl VR.

Dann gilt
$$\dim \mathrm{Kern}(\vartheta) + \underbrace{\dim \mathrm{Bild}(\vartheta)}_{= \mathrm{Rang}(\vartheta)} = \dim V.$$

Bew: Wähle eine Basis $u_1, \dots, u_m$ für $\mathrm{Kern}(\vartheta)$ und ergänze zu einer Basis $u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_{n-m}$ für V; vgl (8.6). (Hierbei ist $n = \dim V$.)

Zz: $\dim \mathrm{Bild}(\vartheta) = n-m$. Dazu genügt: $v_1\vartheta, \dots, v_{n-m}\vartheta$ ist eine Basis von $\mathrm{Bild}(\vartheta)$.

Nach (14.5) gilt $\mathrm{Bild}(\vartheta) = \langle u_1\vartheta, \dots, u_m\vartheta, v_1\vartheta, \dots, v_{n-m}\vartheta \rangle$
$= \langle 0, \dots, 0, v_1\vartheta, \dots, v_{n-m}\vartheta \rangle = \langle v_1\vartheta, \dots, v_{n-m}\vartheta \rangle$.

Bleibt zz: $v_1\vartheta, \dots, v_{n-m}\vartheta$ sind lin unabh.

Seien $c_1, \dots, c_{n-m} \in K$ mit $\sum_{i=1}^{n-m} c_i (v_i\vartheta) = 0$.

Dann gilt $\left(\sum_{i=1}^{n-m} c_i v_i\right)\vartheta = 0$, also $\sum_{i=1}^{n-m} c_i v_i \in \mathrm{Kern}\,\vartheta = \langle u_1, \dots, u_m \rangle$. Wegen
$$V = \langle u_1, \dots, u_m \rangle \oplus \langle v_1, \dots, v_{n-m} \rangle$$
ergibt das $\sum_{i=1}^{n-m} c_i v_i = 0$, also $c_1 = \dots = c_{n-m} = 0$. //

(14.7) Hilfssatz Sei $\vartheta : V \to W$ eine lin Abb zwischen endl dimensl VR. Dann gelten

(1) ϑ ist ein Monomorphismus gdw $\mathrm{Kern}(\vartheta) = \{0\}$.

(2) ϑ ist ein Epimorphismus gdw $\mathrm{Rang}(\vartheta) = \dim W$.

Bew klar nach (14.3), (14.4). //

(14.8) Korollar Sei $\dim V < \infty$ und $\varphi \in \mathrm{End}(V)$. Klopsch

Dann sind äquivalent:

a) φ Monomorphismus

b) φ Epimorphismus (auf V)

c) φ Isomorphismus von V auf V [Automorphismus]

Bew: folgt aus (14.6) und (14.7). //

Bem: Für $\dim V = \infty$ ist die Aussage i.a. nicht mehr richtig (Übung!); vgl. Übaufg 3.1.

(14.9) Lem Seien $\varphi: U \to V$, $\psi: V \to W$ linear.

Dann ist auch $\varphi\psi: U \to W$, $u \mapsto (u\varphi)\psi$ linear.

Bew: Übung. //

(14.10) Def (Basis- und Koord abb)

Sei $\dim V = n < \infty$ und $\mathcal{B} = (v_1, .., v_n)$ eine geordnete Basis von V. Dann heißt

$\nu_{\mathcal{B}}: K^n \to V$, $(x_1, .., x_n) \mapsto x_1 v_1 + ... + x_n v_n$

die zu $\mathcal{B}$ geh Basisabb, und die Umkehrabb

$\gamma_{\mathcal{B}} = \nu_{\mathcal{B}}^{-1}: V \to K^n$, $x_1 v_1 + ... + x_n v_n \mapsto (x_1, .., x_n)$

die zu $\mathcal{B}$ geh Koordinatenabb; vgl (6.8).

Bem Eine leichte Rechnung zeigt:

$\nu_{\mathcal{B}}: K^n \to V$ und $\gamma_{\mathcal{B}}: V \to K^n$ sind zueinander inverse Isomorphismen.

Klopsch

(14.11) Korollar Sei V ein endl. dimensionaler VR. Dann gilt $V \cong K^n$ für $n = \dim V$.

(14.12) Satz (Fundamentalsatz für endl. dim. VR)

Seien V, W endl. dimensional. Dann gilt

$$V \cong W \quad \text{gdw} \quad \dim V = \dim W.$$

Bem: Ein allgemeiner Sachverhalt wird in (8.3) (B7) zum Ausdruck gebracht.

(14.13) Hilfssatz Sei $\dim V < \infty$, und $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ eine geordnete Basis von V, seien $w_1, \dots, w_n \in W$ beliebig. Dann ex. genau eine lin. Abb. $\vartheta : V \to W$ mit $\forall i : v_i\vartheta = w_i$, nämlich

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i \longmapsto (v\gamma_{\mathcal{B}})_1 \cdot w_1 + \dots + (v\gamma_{\mathcal{B}})_n \cdot w_n = \sum_{i=1}^{n} x_i w_i.$$

Bew: Offenbar ist die angegebene Abb. linear und erfüllt $\forall i : v_i\vartheta = w_i$. Sei nun $\tilde{\vartheta} : V \to W$ eine weitere lin. Abb. mit $\forall i : v_i\tilde{\vartheta} = w_i$. Dann gilt für bel. $v = \sum x_i v_i \in V$ $(x_i = (v\gamma_{\mathcal{B}})_i)$:

$$v\tilde{\vartheta} = \left(\sum x_i v_i\right)\tilde{\vartheta} = \sum x_i (v_i\tilde{\vartheta}) = \sum x_i w_i = v\vartheta.$$

Also ist $\tilde{\vartheta} = \vartheta$. //

(14.14) Def / Satz

End(V) ist bzgl. der Verknüpfungen

$$\left.\begin{aligned} v(\varphi + \psi) &= v\varphi + v\psi \\ v(a\varphi) &= a(v\varphi) \end{aligned}\right\} \quad \text{für } \varphi, \psi \in \mathrm{End}(V),\ a \in K \text{ und } v \in V$$

selbst ein K-VR.

Mittels der Hintereinanderausführung

$v(\varphi\psi) = (v\varphi)\psi$ für $\varphi, \psi \in \mathrm{End}(V)$ und $v \in V$

erhält $\mathrm{End}(V)$ zudem die Struktur eines Ringes, mit Nullelement $V \to V, v \mapsto 0$ und Einselement $\mathrm{id}_V : V \to V, v \mapsto v$. Die Einheitengruppe ist $GL(V)$.

Ist $\dim V = 0$, so hat $\mathrm{End}(V) = \{0\}$ nur ein Element $0 = \mathrm{id}_V$. In allen anderen Fällen ist $\mathrm{End}(V)$ eine K-Algebra mit $\mathrm{id}_V \neq 0$.

<u>Bem</u>: Für $\dim V = 1$ ist $\mathrm{End}(V) \cong K$; die Endom sind genau die Homothetien; vgl (14.2).

Für $\dim V \geq 2$ ist $\mathrm{End}(V)$ ein Ring mit 1, der weder kommutativ noch ein Divisionsring ist. [später]

<u>Bew</u>: Übung. //

<u>Frage</u>: Wie „rechnet" man mit linearen Abb/Endom in Koordinaten?