§ 10 Dimension von Vektorräumen

Klopsch

GV: V ein VR über einen Körper K

(10.1) Hilfssatz Sei V endl erzeugt über K, und sei $b_1, .., b_n$ eine Basis von V (gemäß (8.6)). Dann gelten:

(a) $\text{Rang}(v_1, ..., v_m) \leq n$ für jedes Vektorsystem $(v_1, .., v_m)$ in V

(b) $|M| \leq n$ für jede lin unabh Teilmenge $M \subseteq V$.

Bem Insbesondere hat V keine unendlichen lin unabh Teilmengen.

Bew (a) folgt direkt aus (9.7).

(b) Sei $M \subseteq V$ lin unabh. Angenommen, M besitzt n+1 pw versch Elmte $v_1, .., v_{n+1}$. Als Teilmenge von M ist auch $\{v_1, .., v_{n+1}\}$ lin unabh und $\text{Rang}(v_1, .., v_{n+1}) = n+1 > n$. Ⓦ zu (a) //

(10.2) Satz Alle Basen eines endl erzeugten VR bestehen aus gleichvielen Vektoren und deren Anzahl ist endlich.

Bew Sei V endl erz über K. Wähle gem (8.6) eine endl Basis $b_1, .., b_n$ für V mit kleinst möglicher Länge $n \in \mathbb{N}_0$.

Ist M eine bel Basis von V, so ist M lin unabh. und nach (10.1) gilt $|M| \leq n$. Da $|M|$ nicht echt kleiner als n sein kann, folgt $|M| = n$. //

Klopsch

(10.3) <u>Def</u> (Dimension eines VR)

Sei V ein endl erz VR über K. Nach (10.2) gibt es ein $n \in \mathbb{N}_0$, so daß jede Basis von V aus genau n Vektoren besteht. Diese Zahl n heißt <u>Dimension von V</u> über K und wird mit $\dim V = \dim_K V$ bezeichnet.

<u>Bem & Bsple</u>

a) Jeder Nullraum $\{0\}$ hat Dim 0:
$\emptyset$ ist die einzige Basis.

b) Der Standvektraum $\mathbb{R}^n$ über $\mathbb{R}$ hat Dim n:
$\{e_1, \ldots, e_n\}$ ist die Standardbasis. Es gibt überabzählbar unendlich viele andere Basen.

c) Ist ein VR V nicht endl erz, so hat er keine endl Basen, und wir schreiben
$\dim V = \infty$
[Man kann genauer zeigen, daß alle Basen von V gleichmächtig sind.]

d) „endlich dimensional" ist gleichbedeutend mit „endlich erzeugt". Klopsch

(10.4) <u>Hilfsatz</u> (Rangkriterium für eine Basis)

Sei $\dim_K V = n$ endlich. Sei $(v_1, .., v_m)$ ein Vektorsystem in V. Dann ist $(v_1, .., v_m)$ eine geordnete Basis von V gdw $\text{Rang}(v_1, .., v_m) = m = n$ gilt.

<u>Bew</u>: ($\Rightarrow$): Sei $(v_1, .., v_m)$ eine geordnete Basis von V. Dann ist insb $\text{Rang}(v_1, .., v_m) = m$ und nach (10.2) gilt $m = n$.

($\Leftarrow$): Sei umgekehrt $\text{Rang}(v_1, .., v_m) = m$ und $m = n$. Dann ist $\{v_1, .. v_n\}$ eine n-elementige lin unabh Teilmenge von V. Nach (10.1) ist $\{v_1, .., v_n\}$ eine max lin unabh Teilm von V, nach (8.3) also eine Basis von V. //

(10.5) <u>Satz</u> Jeder Unterraum U eines endl dim Vektorraums V ist endl dim'l.
Genauer gilt: $\dim U \leq \dim V$,
und $\dim U = \dim V$ gdw $U = V$.

keine der drei Aussagen ist offenkundig!

<u>Bew</u>: Setze $n = \dim V \in \mathbb{N}_0$. Nach (10.1) hat jede lin unabh Teilmenge von U höchstens n Elemente. Also finden wir eine max lin unabh Teilm $M \subseteq U$ mit $m \leq n$ Elementen.

Klopsch

Nach (8.3) ist M eine Basis von U. Folglich ist U endl dimensional mit

$$\dim U = m \leq n = \dim V.$$

Ist $m=n$, so ist nach (10.4) M auch eine Basis von V, also $U=V$. //

(10.6) <u>Def</u> (Komplementärraum)

Sei U ein Unterraum von V. Ein <u>Komplementärraum</u> zu U in V ist ein Unterraum W von V mit

(i) $U \cap W = \{0\}$ (ii) $U+W=V$.

Man schreibt dann $V = U \oplus W$ und sagt, V ist eine <u>direkte Summe</u> von U und W.

(10.7) <u>Hilfssatz</u> (direkte Summe)

Seien U, W Unterräume von V. Dann sind äquivalent:

(i) $V = U \oplus W$

(ii) Jedes $v \in V$ läßt sich eindeutig schreiben als $v = u + w$ mit $u \in U$, $w \in W$.

<u>Bew</u>: (i) $\to$ (ii): Es gelte $V = U \oplus W$. Sei $v \in V$. Wegen $V = U+W$ ex $u \in U$, $w \in W$ mit $v = u+w$. Sei auch $v = u' + w'$ mit $u' \in U$, $w' \in W$.

Dann gilt $u+w = u'+w'$, also

$u-u' = w'-w \in U \cap W = \{0\}$, also $u=u'$ und $w=w'$.

(ii) → (i): Es gelte (ii). Dann ist jedenfalls $V = U+W$. Sei nun $v \in U \cap W$. Dann sind die Darstellungen $v = v+0$ und $v = 0+v$ gleich, also $v=0$. //

(10.8) Satz (Existenz von Komplementärräumen)

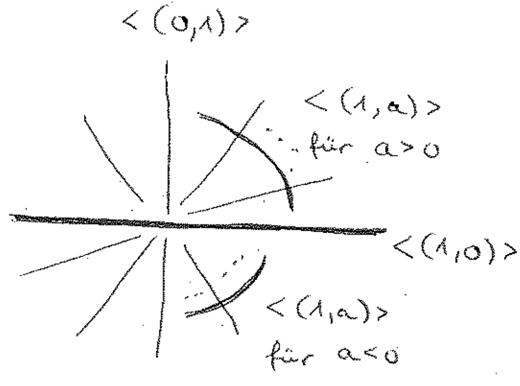
Zu jedem Unterraum U von V gibt es (wenigstens) einen Komplementärraum W in V.

Bew: Sei M eine Basis von U. Gemäß (8.6) können wir M zu einer Basis B von V ergänzen. Setze $N = B \setminus M$. Dann erfüllt $W = \langle N \rangle$ die gewünschten Bedingungen: Jedes Element $v \in V$ läßt sich eindeutig als Linearkomb von Elementen aus B schreiben, also läßt sich jedes $v \in V$ auch eindeutig als $v = u+w$ mit $u \in U = \langle M \rangle$ und $w \in W = \langle N \rangle = \langle B \setminus M \rangle$ schreiben. Nach (10.7) gilt $V = U \oplus W$. //

Bem In der Regel hat ein Unterraum U von V zahlreiche Komplementärräume in V.

Klopsch

Zum Beispiel sind die Komplementärräume von $<(1,0)>$ in $\mathbb{R}^2$ gerade die Räume $<(1,a)>$, $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, und $<0,1>$.



(10.9) Satz (Dimensionsformel für Unterräume)

Seien U, W Unterräume eines endl dimens Vektorraumes V. Dann gilt

$$\boxed{\dim U+W = \dim U + \dim W - \dim U \cap W}$$

[vgl Üb 4.1 !]

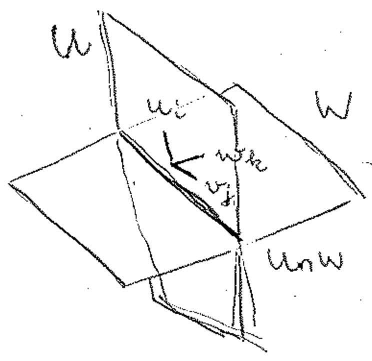
Bew: Es seien $\dim U \cap W = s$,

$\dim U = r+s$, $\dim W = s+t$; siehe (10.5).

Wähle eine Basis $v_1, \dots, v_s$ von $U \cap W$ und ergänze diese jeweils zu einer Basis $u_1, \dots u_r, v_1, \dots, v_s$ von U und einer Basis $v_1, \dots, v_s, w_1, \dots, w_t$ von W. Wir behaupten, daß

$u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_s, w_1, \dots, w_t$

eine Basis von $U+W$ ist.



Daraus folgt dann:

$$\dim U+W = r+s+t = (r+s)+(s+t)-s$$
$$= \dim U + \dim W - \dim U \cap W.$$

Zunächst ist schon klar, daß gilt:

$$\langle u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_s, w_1, \ldots w_t \rangle = U+W.$$

Bleibt zz: $\text{Rang}(u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_s, w_1, \ldots w_t) = r+s+t.$

Sei dazu

(*) $a_1 u_1 + \ldots + a_r u_r + b_1 v_1 + \ldots + b_s v_s + c_1 w_1 + \ldots + c_t w_t = 0$

mit Koeffizienten $a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_s, c_1, \ldots c_t \in K.$

zz: $a_1 = \ldots = a_r = b_1 = \ldots = b_s = c_1 = \ldots = c_t = 0.$

Aus (*) folgt:

$$a_1 u_1 + \ldots + a_r u_r = -(b_1 v_1 + \ldots + b_s v_s + c_1 w_1 + \ldots + c_t w_t)$$
$$\in U \cap W.$$

Die Wahl von $u_1, \ldots, u_r$ bzw $w_1, \ldots, w_t$ ergibt daher $a_1 = \ldots = a_r = 0$ bzw $c_1 = \ldots = c_t = 0$. Da $v_1, \ldots, v_s$ lin unabh sind, folgt dann auch $b_1 = \ldots = b_s = 0$. //

<u>Bem</u>: Der Satz gilt allgemeiner für endl dimens Unterräume U, W eines beliebigen Vektorraums V. Weiterhin liefert der Bew prinzipiell ein Verfahren zur Konstruktion einer Basis von $U+W$.

Klopsch

(10.10) Korollar Sei V endl dimens mit Unterräumen U, W. Dann ist $V = U \oplus W$ gdw $\dim V = \dim U+W = \dim U + \dim W$ gilt.

Bew: Merke:

$$U+W = V \underset{(10.5)}{\Longleftrightarrow} \dim U+W = \dim V$$

und

$$U \cap W = \{0\} \Longleftrightarrow \dim U \cap W = 0$$

$$\underset{(10.9)}{\Longleftrightarrow} \dim U+W = \dim U + \dim V.$$ //

(10.11) Satz (Rang und Dim)

Sei $(v_1, .., v_m)$ ein Vektorsystem in einem Vektorraum V. Dann gilt:

$$\dim \langle v_1, .., v_m \rangle = \operatorname{Rang}(v_1, .., v_m).$$

Bem: Also gilt für $w \in V$:

$\operatorname{Rang}(v_1, .., v_m, w) = \operatorname{Rang}(v_1, .., v_m)$ gdw

$w \in \langle v_1, .., v_m \rangle$ gdw

w ist Linkomb von $v_1, .., v_m$. | Übung!

Bew: Setze $U = \langle v_1, .., v_m \rangle$, $k = \dim U$,

$r = \operatorname{Rang}(v_1, .., v_m)$.

Das endl. Erzeugendensystem $\{v_1, .., v_m\}$ enthält eine Basis von U. OE sei $\{v_1, .., v_k\}$ eine solche Basis von U.

Dann gilt:

$$k = \text{Rang}(v_1, .., v_k) \leq \text{Rang}(v_1, .., v_m) = r.$$

Andererseits gilt nach (10.1) $r \leq k$.

Also ist $k = r$. //