Klopsch

§ 9 Rang eines endl Vektorsystems

<u>GV</u>: V ein VR über einem Körper K

(9.1) <u>Def</u> (Rang eines Vektorsystems)

Sei $m \in \mathbb{N}_0$, und seien $v_1, .., v_m \in V$.
Der <u>Rang</u> des Vektorsystems $(v_1, .., v_m)$
ist diejenige Zahl

System ≡ Tupel (traditionelle Bezeichnung)

$$\text{Rang}(v_1, \dots, v_m) = r \in \mathbb{N}_0,$$

für die gilt:

1) Es ex eine lin unabh Teil<u>menge</u> von $\{v_1, .., v_m\}$, welche aus genau r Elementen besteht.
2) Jede Teilmenge von $\{v_1, .., v_m\}$, welche aus mehr als r Elementen besteht, ist lin abh.

<u>Bem</u>: a) $0 \leq \text{Rang}(v_1, .., v_m) \leq m$

b) $\text{Rang}(v_1, .., v_m) = 0 \iff v_1 = \dots = v_m = 0$

c) $\text{Rang}(v_1, .., v_{m-1}) \leq \text{Rang}(v_1, .., v_m)$

d) $\text{Rang}(v_1, .., v_m, 0) = \text{Rang}(v_1, .., v_m)$

e) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i) $\text{Rang}(v_1, .., v_m) = m$

(ii) $\{v_1, .., v_m\}$ ist eine m-elementige lin unabh Menge.

(iii) Gilt $a_1 v_1 + \dots + a_m v_m = 0$ für $a_1, .., a_m \in K$, so folgt stets $a_1 = \dots = a_m = 0$.

Klopsch

Gelten diese Aussagen (i) - (iii), so heißt das System $(v_1, .., v_m)$ <u>lin unabh</u>, andernfalls <u>lin abh</u>.

<u>Bspl</u>: In $V = \mathbb{R}^2$ ist

$((1,0), (1,0))$ lin abh, obschon

$\{(1,0), (1,0)\} = \{(1,0)\}$ lin unabh ist.

(9.2) <u>Lem</u> Sei $(v_1, .., v_m)$ ein Vektorsystem in V, und sei w eine Linkomb von $v_1, .., v_m$.
Dann gilt $\mathrm{Rang}(v_1, .., v_m, w) = \mathrm{Rang}(v_1, .., v_m)$.

<u>Bew</u>: Setze $r = \mathrm{Rang}(v_1, .., v_m)$. Offenbar gilt dann $\mathrm{Rang}(v_1, .., v_m, w) \geq r$. Zz: $\mathrm{Rang}(v_1, .., v_m, w) \leq r$.
Da Teilm von lin unabh Teilm stets selbst lin unabh sind, genügt: Jede $(r+1)$-elem Teilm von $\{v_1, .., v_m, w\}$ ist lin abh.

Angenommen, $T \subseteq \{v_1, ..., v_m, w\}$ lin unabh mit $|T| = r+1$.
Dann gilt $w \in T$ und $T \setminus \{w\}$ ist wegen $|T \setminus \{w\}| = r$ eine max lin unabh Teilm von $\{v_1, .., v_m\}$. Nach (8.2) 2) folgt dann

$w \in \langle v_1, .., v_m \rangle = \langle T \setminus \{w\} \rangle$. Also ist T lin abh W. //

(9.3) <u>Def</u> (Elem Umformungen eines Vektorsystems)
Eine <u>elementare Umformung</u> eines Vektorsystems $(v_1, ..., v_m)$ ist eine der folgenden

Operationen, welche $(v_1,..,v_m)$ in ein System $(v_1',...,v_m')$ überführt:

(EU1) Ersetze ein v_i in $(v_1,..,v_m)$ durch $v_i + av_j$, wobei $a \in K$ und $j \neq i$,

(EU2) Platzvertauschung von v_i und v_j in $(v_1,..,v_m)$,

(EU3) Ersetze ein v_i in $(v_1,..,v_m)$ durch av_i, wobei $a \in K \setminus \{0\}$.

(9.4) <u>Satz</u> (Invarianz des Ranges unter elem Umf)

Der Rang eines Vektorsystems ändert sich unter elem Umformungen nicht: Geht $(v_1',..,v_m')$ aus $(v_1,..,v_m)$ durch (EU1), (EU2) oder (EU3) hervor, so gilt $\text{Rang}(v_1',..,v_m') = \text{Rang}(v_1,..,v_m)$.

<u>Bew</u>: (EU2) klar.

Gehe nun $(v_1',..,v_m')$ aus $(v_1,..,v_m)$ durch (EU1) oder (EU3) hervor. Durch erneute Anwendung von (EU1) bzw (EU3) kann die Umformung rückgängig gemacht werden. Daher genügt es, zz: $\text{Rang}(v_1,..,v_m) \geq \text{Rang}(v_1',..,v_m')$. Es gibt ein $i \in \{1,..,m\}$, so daß $v_j' = v_j$ für $j \neq i$ gilt. Weiterhin ist v_i' Linkomb von $v_1,..,v_m$.

Das ergibt $\text{Rang}(v_1,..,v_m) \underset{(9.2)}{=} \text{Rang}(v_1,..,v_m, v_i')$

$\geq \text{Rang}(v_1',..,v_m')$. //

(9.5) Motivation / Def

Wir arbeiten auf ein konkretes Verfahren zur Rangbestimmung hin.

Sei $(v_1, .., v_m)$ ein Vektorsystem. Indem wir V ggf durch $\langle v_1, .., v_m \rangle$ ersetzen, dürfen wir annehmen: V ist endl erz. Nach (8.6) besitzt V dann eine endl Basis. Gemäß (6.8) sei $(b_1, .., b_n)$ eine geordnete Basis von V. Jedes v_i besitzt dann eine eindeutige Darstellung

$$v_i = a_{i1} b_1 + \ldots + a_{in} b_n \quad \text{mit } a_{ij} \in K$$

$(1 \leq i \leq m)$.

Wir notieren die Koeffizienten in der $m \times n$ Koordinatenmatrix

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & & a_{mn} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow v_1 \\ \leftarrow v_2 \\ \ldots \\ \leftarrow v_m \end{array} \end{array}$$

von $(v_1, .., v_m)$ bzgl $(b_1, .., b_n)$.

Formal ist dies eine Abb $\{(i,j) \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\} \to K$.

Elem Umformungen des Systems $(v_1, .., v_m)$ entsprechen elem Zeilenumformungen der Koordinatenmatrix $(a_{ij})_{i,j}$:

(ZU1) Ersetze die i-te Zeile durch die Summe der i-ten Zeile und eines skalaren Vielfachen der j-ten Zeile für $j \neq i$.

(ZU2) Vertausche die i-te und die j-te Zeile.

(ZU3) Ersetze die i-te Zeile durch skalares Vielfache $\neq 0$ ihrer selbst.

Entsprechend def man <u>elem Spaltenumformungen</u>.

Wir beschränken uns fürs erste auf:

(SU2) Vertausche die i-te und die j-te Spalte.

Diese Spaltenumf entspricht der Umnummerierung der Basisvektoren $b_1, \dots, b_n$ und hat keine Auswirkungen auf $\mathrm{Rang}(v_1, \dots, v_n)$.

(9.6) <u>Lem</u> Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $(a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$ eine $m \times n$ Matrix über K. Dann läßt sich $(a_{ij})_{i,j}$ durch elem Zeilenumf (ZU1), (ZU2), (ZU3) und Spaltenvertauschungen (SU2) auf die folgende Form bringen:

$$
\begin{array}{c}
\\
r\left\{\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right. \\
\\
\\
\\
\end{array}
\begin{array}{c}
\overbrace{\hphantom{1 \quad 0 \cdots 0}}^{r} \\
\left(\begin{array}{cccc|ccc}
1 & 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\
0 & 1 & \ddots & 0 & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * \\
\hline
0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{array}\right)
\end{array}
,
$$

nicht näher bestimmte Einträge

wobei $0 \le r \le \min\{m, n\}$.

Klopsch

<u>Bem</u>: Der quadr $r \times r$-Block oben links heißt $r \times r$ <u>Einheitsmatrix</u>.

<u>Bew</u> Wir argumentieren rekursiv nach dem Parameter m.

Sind alle Einträge von $(a_{ij})_{ij}$ gleich 0, so hat $(a_{ij})_{ij}$ bereits die gewünschte Form für $r = 0$.

Sei nun $(a_{ij})_{ij}$ keine Nullmatrix. Dann ist wenigstens ein Eintrag $\neq 0$, und durch Zeilen- und Spaltenvertauschungen erreichen wir, daß der $(1,1)$-Eintrag $\neq 0$ ist: oE ist $a_{11} \neq 0$. Durch Skalieren der ersten Zeile erreichen wir, daß der $(1,1)$-Eintrag $= 1$ ist: oE ist $a_{11} = 1$.

Ist $m = 1$, so ist $(a_{ij})_{ij}$ von der gewünschten Form für $r = 1$. Sei nun $m \geq 2$. Durch Subtraktion geeigneter Vielfache der ersten Zeile von den übrigen Zeilen ~~er~~reichen wir, daß alle weiteren Einträge in der ersten Spalte $= 0$ sind: oE gilt $a_{i1} = 0$ für $2 \leq i \leq m$.

Ist $n = 1$, so hat $(a_{ij})_{ij}$ die gew Form für $r = 1$. Sei nun $n \geq 2$. Betrachte in

$$\begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

die gekennzeichnete $(m-1)\times(n-1)$-Untermatrix. Rekursiv können wir diese auf die angestrebte Form bringen. Die dazu nötigen Zeilen- und Spaltenumformungen verändern nicht die erste Spalte. OE ist $(a_{ij})_{ij}$ daher von der Gestalt

$$r-1\left\{\begin{pmatrix} 1 & \overbrace{*\ \cdots}^{r-1} & & \cdots & * \\ 0 & 1 & & * & \cdots & * \\ \vdots & & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & 1 & * & \cdots & * \\ \vdots & 0 & \cdots\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\right.,$$

wobei $0 \le r-1 \le \min\{m-1, n-1\}$ ist.

Schließlich bringen wir die Matrix auf die gewünschte Form, indem wir geeignete Vielfache der 2. bis r. Zeile von der ersten Zeile abziehen. //

(9.7) <u>Satz</u> (Rangbestimmung)

Sei V endlich erzeugt und $(b_1, .., b_n)$ eine geordnete Basis von V. Durch Anwendung der elem. Umformungen (EU1) – (EU3) läßt sich ein Vektorsystem $(v_1, .., v_m)$ in V stets in

Klopsch

ein System $(v_1', \dots, v_m')$ überführen, welches bzgl einer Basis, die sich von $(b_1, \dots b_n)$ höchstens durch Umnumerierung der b_i unterscheidet, eine Koordmatrix der Form

$$\begin{array}{cc} & \overbrace{\hphantom{1 \quad \ddots \quad 1}}^{r} \hphantom{\quad * \cdots *} \\ r\left\{\vphantom{\begin{array}{c}1\\ \ddots \\ 1\end{array}}\right. & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & * & \cdots & * \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & 1 & * & \cdots & * \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

mit $0 \le r \le \min\{m, n\}$ besitzt.

Es gilt dann $\operatorname{Rang}(v_1, \dots, v_m) = \operatorname{Rang}(v_1', \dots, v_m')$
$= r$.

<u>Bew</u> Aufgrund der Überlegungen (9.4), (9.5), (9.6) dürfen wir oE annehmen, daß $(v_1, \dots, v_m)$ selbst bzgl $(b_1, \dots, b_n)$ eine Koordmatrix der angegebenen Form hat. ZZ bleibt: $\operatorname{Rang}(v_1, \dots v_m) = r$.
Offenbar gilt $v_{r+1}, \dots, v_m = 0$. Es folgt

$$\operatorname{Rang}(v_1, \dots v_m) = \operatorname{Rang}(v_1, \dots v_r, 0, \dots, 0) = \operatorname{Rang}(v_1, \dots v_r).$$

Es genügt also, ZZ: $v_1, \dots, v_r$ sind lin unabh.
Aufgrund der speziellen Gestalt der Koordinatenmatrix ist

$v_i = b_i + w_i$ mit $w_i \in \langle b_{r+1}, \dots, b_n \rangle$
für $1 \le i \le r$.

Sei $a_1 v_1 + \dots + a_r v_r = 0$ mit $a_1, \dots, a_r \in K$.

Klopsch

Dann ex $a_{r+1}, \dots, a_n \in K$, so daß

$$a_1 b_1 + \dots + a_r b_r + \underbrace{a_{r+1} b_{r+1} + \dots + a_n b_n}_{= a_1 w_1 + \dots + a_r w_r \,\in\, \langle b_{r+1}, \dots, b_n \rangle} = 0 .$$

Da $(b_1, \dots, b_n)$ als Basis lin unabh ist, folgt $a_1 = \dots = a_r \; (= a_{r+1} = \dots = a_n) = 0$.
Nach (7.8) sind $v_1, \dots, v_r$ daher lin unabh. //

<u>Bem</u>: Insbesondere ist die in (9.6) auftretende Zahl r unabh von den konkret ausgeführten Umformungen. Sie heißt <u>Zeilenrang</u> der gegebenen Matrix.

(9.8) <u>Bspl</u>: $K = \mathbb{F}_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

[Zeilenrang 3].