Klopsch

§ 8 Charakterisierung und Existenz von Basen

<u>GV</u>: K ein Körper, V ein Vektorraum über K

(8,1) <u>Def</u> (min Erzeugendensystem, max lin unabh Teilm.)

Sei $M \subseteq V$.

a) M heißt <u>minimales Erzeugendensystem</u> von V, falls gilt:

$$<\tilde{M}> = V \iff \tilde{M} = M \quad \text{für alle } \tilde{M} \subseteq M.$$

b) Ist $M \subseteq E \subseteq V$, so heißt M eine <u>maximale linear unabh Teilmenge</u> von E, falls gilt:

$$\tilde{M} \text{ lin unabh} \iff \tilde{M} = M \quad \text{für alle } \tilde{M} \subseteq E \text{ mit } M \subseteq \tilde{M}.$$

(8,2) <u>Hilfsatz</u>

Sei $M \subseteq V$ und $v \in V$. Dann gelten:

1) Ist M lin unabh und $M \cup \{v\}$ lin abh, so gilt $v \in <M>$. [vgl (7,5)]

2) Ist M eine max lin unabh Teilmenge einer Menge $E \subseteq V$, so gilt

$$E \subseteq <M> = <E>.$$

<u>Bew</u>: 1) Sei M lin unabh und $M \cup \{v\}$ lin abh.

Nach (7,7) ex $m \in \mathbb{N}$, $v_1, \dots, v_m \in M \cup \{v\}$ pw versch

Klopsch

und $a_1, \dots, a_m \in K$ nicht allesamt gleich 0 mit

$$0 = a_1 v_1 + \dots + a_m v_m.$$

Da M lin unabh ist, dürfen wir oE [ohne Einschränkung] $v_1 = v$ und $v_2, \dots, v_m \in M$ annehmen. Weiterhin gilt dann notwendigerweise $a_1 \neq 0$. Setze $c_i = -a_i/a_1$ für $i \in \{2, \dots, m\}$. Das ergibt

$$v = v_1 = \frac{1}{a_1}(-a_2 v_2 - \dots - a_m v_m) = c_2 v_2 + \dots + c_m v_m \in \langle M \rangle.$$

2) Sei M eine max lin unabh Teilmenge von $E \subseteq V$. Sei $v \in E$. Ist $v \in M$ so gilt offenbar $v \in \langle M \rangle$. Ist $v \notin M$, so ist $M \cup \{v\}$ lin abh und aus 1) folgt: $v \in \langle M \rangle$. Also gilt $E \subseteq \langle M \rangle$. Daraus folgt $\langle E \rangle \subseteq \langle M \rangle$, und $M \subseteq E$ impliziert $\langle M \rangle \subseteq \langle E \rangle$. Also gilt $\langle M \rangle = \langle E \rangle$. //

(8.3) <u>Hauptsatz</u> (Charakterisierung einer Basis)

Sei $M \subseteq V$. Dann sind äquivalent:

Standardkriterien!

(B1) M ist eine Basis von V. [vgl Def (6.8)]

(B2) M ist ein min Erzeugendensystem von V.

(B3) M erzeugt V und ist lin unabh.

(B4) M ist eine max lin unabh Teilmenge von V.

10

11

Klopsch

(B5) Für jedes Erzsystem E von V mit $M \subseteq E$ ist M eine max lin unabh Teilmenge von E.

Existenz von Basen!

(B6) Es ex ein Erzsystem E von V, welches M als max lin unabh Teilmenge enthält.

Vorgriff: lineare Abb!

(B7) Es ex eine Bijektion $\varphi : K^{(M)} \to V$ mit

a) Für alle $x, y \in K^{(M)}$, $a \in K$ gilt:

$$(x+y)\varphi = x\varphi + y\varphi \quad \text{und} \quad (ax)\varphi = a(x\varphi)$$

[φ ist eine lineare Abb; siehe später]

b) Für alle $w \in M$ gilt: $(e_w)\varphi = w$,

wobei $e_w : M \to K$, $e_w(v) = \begin{cases} 1 & v = w \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

[φ bildet Standardbasis auf M ab]

<u>Bew</u>: Wir weisen nacheinander nach:

$$\begin{tikzcd} & (B2) \arrow[r, leftrightarrow] & (B3) \arrow[r] \arrow[dl, leftrightarrow] & (B4) \arrow[d] \\ (B7) \arrow[r, leftrightarrow] & (B1) & (B6) \arrow[u] & (B5) \arrow[l] \end{tikzcd}$$

- „(B2) $\leftrightarrow$ (B3)": folgt aus den Def (7.3), (8.1).
- „(B1) $\to$ (B3)": Sei M eine Basis von V. Nach Def (6.8) gilt $V = \langle M \rangle$, dh M ist ein Erzeugendensystem von V. Zz bleibt: M ist lin unabh.

Verwende (7.8). Seien $m \in \mathbb{N}_0$, $v_1, \dots, v_m \in M$ pw versch und $a_1, \dots, a_m \in K$ mit

$$0 = a_1 v_1 + \dots + a_m v_m.$$

Offenbar ist auch $0 = 0 v_1 + \dots + 0 v_m$. Da sich 0 eindeutig als Linkomb von Elmten aus M schreiben läßt, folgt $a_1 = a_2 = \dots = a_m = 0$.

- „(B3) $\rightarrow$ (B1)": Sei $\langle M \rangle = V$ und M lin unabh. Jedenfalls ist dann jedes $w \in V$ Linkomb von pw versch Elmten aus M: es gibt zu $w \in V$ ein $x \in K^{(M)}$ mit $w = \sum_{v \in M} x(v) \cdot v$.

Bleibt zz: diese Darstellung ist eindeutig.

Seien also $x, y \in K^{(M)}$ mit

$$\sum_{v \in M} x(v) \cdot v = \sum_{v \in M} y(v) \cdot v.$$

Dann folgt $\sum_{v \in M} (x(v) - y(v))\, v = 0$.

Da M lin unabh ist, liefert (7.8) nun

$x(v) - y(v) = 0$, also $x(v) = y(v)$ für alle $v \in M$.

Damit gilt $x = y$.

- „(B1) $\rightarrow$ (B7)": Sei M eine Basis von V. Betrachte die Abb $\varphi : K^{(M)} \rightarrow V$, $x \mapsto \sum_{v \in M} x(v) \cdot v$.

Nach Def (6.8) ist φ eine Bijektion (surjektiv und injektiv). Ferner ist die Bedingung (a) erfüllt; vgl Beobachtung zu (6.3).

Schließlich gilt für jedes $w \in M$:

$$(e_w)\varphi = \sum_{v \in M} e_w(v)\, v = 1 \cdot w = w.$$

Damit ist auch (b) erfüllt.

- „(B7) → (B1)“: Sei $\varphi : K^{(M)} \to V$ wie in (B7) mit den beschriebenen Eigenschaften. Für jedes $x \in K^{(M)}$ gilt $x = \sum_{v \in M} x(v)\, e_v$; vgl (6.9) b). Aus (a), (b) ergibt sich somit

$$x\varphi = \Big(\sum_{v \in M} x(v)\, e_v\Big)\varphi = \sum_{v \in M} x(v)\,(e_v \varphi)$$

$$= \sum_{v \in M} x(v) \cdot v.$$

Da φ eine Bijektion darstellt, zeigt dies, daß es zu jedem $w \in V$ genau ein $x \in K^{(M)}$ gibt mit $w = \sum_{v \in M} x(v)\, v$.

Somit ist M eine Basis von V.

- „(B3) → (B4)“: Sei $\langle M \rangle = V$ und M lin unabh. Sei $v \in V \setminus M$. Zz: $\tilde{M} = M \cup \{v\}$ ist lin abh. Wegen $v \in V = \langle M \rangle = \langle \tilde{M} \setminus \{v\} \rangle$ folgt dies aus (7.5).
- „(B4) → (B5)“: Ist M eine max lin unabh. Teilm von V, dann ist M auch max lin unabh in jeder Menge $E \subseteq V$ mit $M \subseteq E$.
- „(B5) → (B6)“ klar wegen $V = \langle V \rangle$.

Klopsch.

• „(B6) → (B3)": Sei M max lin unabh in einem Erzeugendensystem E von V. Da M lin unabh ist, bleibt zz: $\langle M \rangle = V = \langle E \rangle$. Dies folgt aus (8.2) 2). //

Frage: Gibt es für jeden VR stets eine Basis?

Antw: Ja. Zum Nachweis verwenden wir den Zermeloschen Wohlordnungssatz.

Erinnerung: Rel $R \subseteq M \times M$, xRy bedeutet $(x,y) \in R$

(8.4) Def Sei M eine Menge.

(a) Eine Halbordnung $\leq$ auf M ist eine Relation auf M mit den folgenden Eigenschaften

- $\forall x \in M: x \leq x$ ($\leq$ reflexiv auf M)
- $\forall x,y,z \in M$: $x \leq y$ und $y \leq z$ $\Rightarrow x \leq z$ ($\leq$ transitiv)
- $\forall x,y \in M$: $x \leq y$ und $y \leq x$ $\Rightarrow x = y$ ($\leq$ antisymmetrisch)

Bspl: $(\mathbb{N}, \leq)$

$(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ für eine bel Menge X

(b) Wir sagen $(M, \leq)$ ist eine geordnete Menge, falls $\leq$ eine Halbordnung auf M darstellt.

Klopsch

$(M, \leq)$ heißt <u>total</u> (oder vollständig oder linear) geordnete Menge, falls zusätzlich je zwei Elemente stets <u>vergleichbar</u> sind:

$\forall x, y \in M: \; x \leq y$ oder $y \leq x$.

Wir nennen $(M, \leqslant)$ eine <u>wohlgeordnete Menge</u>, falls $\leqslant$ eine Halbordnung auf M ist, für die zusätzlich gilt:

- Ist $\emptyset \neq X \subseteq M$, so ex $x \in X$ mit

  $x \leqslant y$ für alle $y \in X$.

  „Jede nicht-leere Teilmenge von M besitzt ein kleinstes Elmt." [Antisymmetrie $\Rightarrow$ kl Elmt eindeutig]

<u>Bspl</u>: $(\mathbb{N}, \leq)$ wohlgeordnet (gew $\leq$)

$(\mathbb{Z}, \leq)$ nicht wohlgeordnet (gew $\leq$)

- $\mathbb{Z}$ läßt sich über die Abmachung

  $0 \preccurlyeq 1 \preccurlyeq -1 \preccurlyeq 2 \preccurlyeq -2 \preccurlyeq \ldots$ wohlordnen.

(8.5) <u>Zermeloscher Wohlordnungssatz</u>

Jede Menge läßt sich wohlordnen.

<u>Bem</u>: Der Wohlordnungssatz ist äquivalent zum Auswahlaxiom (siehe (2.6)).

Ist M wohlgeordnet, so können wir die Auswahlfunktion $\varphi: \mathcal{P}(M) \setminus \{\emptyset\} \to M$, $X\varphi = \min X \in X$ wählen.

$\frac{M}{12}$

Klopsch

(8.6) Satz (Basisergänzungssatz)

Sei E ein Erzsystem von V und $M \subseteq E$ lin unabh.
Dann ex eine Basis B von V mit $M \subseteq B \subseteq E$.

Folgerung: Jeder Vektorraum hat eine Basis; und jeder endl erzeugte Vektorraum hat eine endl Basis.
[Wende den Satz auf $M = \emptyset$, $E = V$ bzw $M = \emptyset$ und ein endl Erzsyst E von V an]

Bew: Nach (8.5) lassen sich M, mittels $\leqslant_M$, und $E \setminus M$, mittels $\leqslant_{E\setminus M}$, wohlordnen. Wir erweitern $\leqslant_M$ und $\leqslant_{E\setminus M}$ zu einer Wohlordnung $\leqslant$ auf E, indem wir

$$v \leqslant w \quad \text{setzen, falls} \quad \begin{cases} v \leqslant_M w & (v, w \in M), \text{ oder} \\ v \leqslant_{E\setminus M} w & (v, w \in E\setminus M), \text{ oder} \\ v \in M \text{ und } w \in E\setminus M. \end{cases}$$

Betrachte nun

$$B = \{ w \in E \mid w \notin \langle \{ v \in E \mid \underset{\text{und}}{v \neq w} \; v \leqslant w \} \rangle \}.$$

Offenbar gilt: $M \subseteq B \subseteq E$; vgl (7.5).
Nach (8.3) (B6) genügt es, zz: B ist eine max lin unabh Teilmenge von E.

Angenommen, B ist lin abh. Nach (7.7) ex dann $m \in \mathbb{N}$, pw versch $v_1, \dots, v_m \in B$ und $a_1, \dots, a_m \in K$, nicht allesamt $= 0$, mit

$$0 = a_1 v_1 + \dots + a_m v_m.$$

Ohne Einschr dürfen wir annehmen: Klopsch

$v_1 \leq v_2 \leq \ldots \leq v_m$ und $a_m \neq 0$.

Dann gilt $v_m = \frac{1}{a_m}(-a_1 v_1 - \ldots - a_{m-1} v_{m-1})$

$\in \langle v_1, \ldots, v_{m-1} \rangle \subseteq \langle \{ v \in E \mid v \neq v_m \text{ und } v \leq v_m \} \rangle$. (W)

Also ist B lin unabh.

Angenommen, B ist nicht max lin unabh in E.

Dann ex ein kleinstes Element $w \in E \setminus B$, so daß

$B \cup \{w\}$ lin unabh ist. Wegen $w \in E \setminus B$ ist

$w \in \langle \{ v \in E \mid v \neq w \text{ und } v \leq w \} \rangle$. Nach (8.2) 1)

gilt für jedes $v \in E$ mit $v \neq w$ und $v \leq w$: $v \in B$ oder

$B \cup \{v\}$ lin abh, also $v \in \langle B \rangle$. Damit ist

$w \in \langle B \rangle$ und nach (7.5) daher $B \cup \{w\}$ lin abh. (W) //

Bem Offenbar kann man bei endl erzeugten Vektorräumen (größtenteils) auf den Wohlordnungssatz verzichten, da sich endliche Mengen offensichtlich wohlordnen lassen.

Übung: Zeigen Sie ohne Verwendung des Wohlordnungssatzes:

Jede (möglicherweise unendliche!) lin unabh Teilm eines endl erz Vektorraumes läßt sich zu einer Basis ergänzen.