Klopsch

§7 Erzeugendensysteme, lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit

GV: Sei K ein Körper und V ein Vektorraum über K.

(7.1) Def (Erzeugendensystem)

a) Ein Unterraum U von V wird von einer Teilmenge $M \subseteq V$ erzeugt, falls gilt: $U = \langle M \rangle$.
In diesem Fall heißt M ein (lineares) Erzeugendensystem von U. [traditionelle Bezeichnung]

b) Der Vektorraum V heißt endlich erzeugt, falls V ein endl. Erzeugendensystem besitzt.

(7.2) Bsple / Bem

a) Ist V endl. erzeugt, so gibt es $m \in \mathbb{N}_0$ und $v_1, \ldots, v_m \in V$ mit
$$V = \langle v_1, \ldots, v_m \rangle = \{ a_1 v_1 + \ldots + a_m v_m \mid a_i \in K \}$$

b) Jede Basis ist ein Erzeugendensystem.
Insbesondere bilden die Standardeinheitsvektoren $e_1 = (1, 0, \ldots 0), \ldots, e_n = (0, \ldots, 0, 1)$ ein Erzeugendensystem für $V = K^n$.

c) Ein Nullraum $\{0\}$ hat genau zwei Erzeugendensysteme: $\{0\}$ und $\emptyset$.

d) Stets ist V selbst ein Erzeugendensystem für V

Klopsch

e) Sei I eine unendliche Menge (zB $I = \mathbb{N}$). Dann besitzt $V = K^{(I)}$ <u>kein</u> endliches Erzeugendensystem. [Übung!]

f) Die Menge $\mathcal{C}^0([0,1])$ aller stetigen Funktionen $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ bildet einen Untervektorraum von $\mathbb{R}^{[0,1]}$. Man kann zeigen, daß der $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathcal{C}^0([0,1])$ <u>nicht</u> endl erzeugt ist. [knifflige Übung!]

<u>Motivation</u>: Es ist naheliegend, möglichst kleine Erzeugendensysteme zu suchen.

(7.3) <u>Def</u> (lin Abh und Unabh)

Sei $M \subseteq V$. Dann heißt M eine <u>linear unabhängige Teilmenge</u> von V, falls für alle $v \in M$ gilt:

$$< M \setminus \{v\} > \neq < M >.$$

Ist M nicht lin unabh, so heißt M eine <u>linear abhängige Teilmenge</u> von V.

[<u>NB</u>: Momentan verwenden wir die Begriffe „lin unabh", „lin abh" ausschließlich für Mengen.]

<u>Bem</u>: $M \subseteq V$ ist lin abh gdw es ein $v \in M$ gibt mit $<M \setminus \{v\}> = <M>$.

(7.4) <u>Bsple</u>

a) $\emptyset \subseteq V$ ist stets lin unabh.

Klopsch

9/10

b) Jede Teilmenge $M \subseteq V$ mit $0 \in M$ ist lin abh, denn $\langle M \setminus \{0\} \rangle = \langle M \rangle$.

c) Die Vektoren $(1,2)$, $(3,4)$, $(5,6)$ bilden ein Erzeugendensystem von $V = \mathbb{R}^2$ über $K = \mathbb{R}$.

$\{(1,2), (3,4), (5,6)\}$ ist lin abh, da bereits $\langle (1,2), (3,4) \rangle = \mathbb{R}^2$ ist.

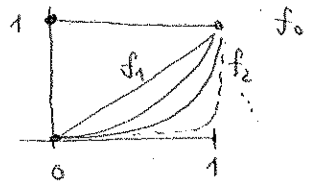
$\{(1,2), (3,4)\}$ ist lin unabh. [Übung!]

d) Jede Basis von V ist lin unabh.

e) $K = \mathbb{R}$, $V = \mathcal{C}^0([0,1]) = \{ f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig} \}$

Für $n \in \mathbb{N}_0$ def die Polynomfunktion

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto t^n$$



Ist $\{ f_n \mid n \in \mathbb{N}_0 \}$ lin unabh in V?

(7.5) <u>Lemma</u>

Sei $M \subseteq V$ und $v \in M$ mit $v \in \langle M \setminus \{v\} \rangle$. Dann ist M lin abh.

<u>Bew</u>: Setze $\tilde{M} = M \setminus \{v\}$. Es genügt, zz: $\langle \tilde{M} \rangle = \langle M \rangle$. Wegen $\tilde{M} \subseteq M$ gilt jedenfalls $\langle \tilde{M} \rangle \subseteq \langle M \rangle$. Zz bleibt: $\langle \tilde{M} \rangle \supseteq \langle M \rangle$.

Klotzsch

Aus $v \in \langle \tilde{M} \rangle$ folgt $M = \tilde{M} \cup \{v\} \subseteq \langle \tilde{M} \rangle$,

mit (6.5) also $\langle M \rangle \subseteq \langle \tilde{M} \rangle$. //

(7.6) <u>Def</u> (Nicht-triviale Darstellung der 0)

Seien $m \in \mathbb{N}_0$ und $v_1, \dots, v_m \in V$. Wir sagen, 0_V läßt sich nicht-trivial als Linearkombination von $v_1, \dots, v_m$ darstellen, falls es $a_1, \dots, a_m \in K$ gibt mit
- wenigstens ein a_i, $i \in \{1, \dots, m\}$, ist $\neq 0$,
- $a_1 v_1 + \dots + a_m v_m = 0$.

<u>NB</u>: $v_1, \dots, v_m$ sind nicht notwendig pw verschieden! Ist $m \geq 2$ und etwa $v_1 = v_2$, so läßt sich 0 nicht-trivial als Linkomb von $v_1, \dots, v_m$ darstellen:

$$0 = 1 \cdot v_1 + (-1) v_2 + 0\, v_3 + \dots + 0\, v_m.$$

(7.7) <u>Satz</u> (Charakterisierung der lin Abh)

Sei $M \subseteq V$. Dann sind äquivalent:

1) M ist lin abh.

2) Es gibt $m \in \mathbb{N}$ und $v_1, \dots v_m \in M$ pw verschieden, so daß sich 0 nicht-trivial als Linkomb von $v_1, \dots v_m$ darstellen läßt.

<u>Bew</u>: „1) → 2)": Sei M lin abh. Dann gibt es ein $v_1 \in M$ mit $\langle M \setminus \{v_1\} \rangle = \langle M \rangle$. Insbesondere ist $v_1 \in \langle M \setminus \{v_1\} \rangle$. Wir finden $m \geq 1$,

$c_2, \dots, c_m \in K$ und $v_2, \dots, v_m \in M \setminus \{v_1\}$ mit

$$v_1 = c_2 v_2 + \dots + c_m v_m .$$

Ohne Einschränkung dürfen wir dabei $v_2, \dots, v_m$ als pw versch voraussetzen. Setze nun $a_1 = 1$ und $a_i = -c_i$ für $i \in \{2, \dots, m\}$. Dann ergibt

$$0 = \underbrace{a_1}_{=1 \neq 0} v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_m v_m$$

eine nicht-triviale Darstellung der 0 mit $v_1, \dots, v_m \in M$ pw versch.

„1) $\Leftarrow$ 2)": Seien $m \in \mathbb{N}$, $v_1, \dots, v_m \in M$ pw versch und

$$0 = a_1 v_1 + \dots + a_m v_m$$

mit $a_1, \dots, a_m \in K$ eine nicht-triviale Darst der 0.

Sei etwa $a_1 \neq 0$. Setze $c_i = -a_i/a_1$ für $i \in \{2, \dots, m\}$.

Dann ist
$$v_1 = \frac{1}{a_1}\left((-a_2)v_2 + \dots + (-a_m)v_m\right)$$
$$= c_2 v_2 + \dots + c_m v_m \in \langle M \setminus \{v_1\} \rangle ,$$

Aus (7.5) folgt: M ist lin abh. //

(7.8) Satz (Char der lin Unabh)

Sei $M \subseteq V$. Dann sind äquiv:

1) M ist lin unabh.

2) Sind $m \in \mathbb{N}_0$ und $v_1, \dots, v_m \in M$ pw versch, so folgt aus
$$0 = a_1 v_1 + \dots + a_m v_m \quad \text{für } a_1, \dots, a_m \in K$$
stets $a_1 = a_2 = \dots = a_m = 0$.

Bew: folgt aus (7.7). //

Klopsch

(7.9) Folgerung: Seien $M_1 \subseteq M_2 \subseteq V$. Klopsch

Ist M_1 lin abh, so ist auch M_2 lin abh.

Ist M_2 lin unabh, so ist auch M_1 lin unabh.

Bew: folgt aus (7.7) bzw (7.8). //

(7.10) Bspl: vgl (7.4) e)

$K = \mathbb{R}$, $V = \mathcal{C}^0([0,1])$

$f_n : [0,1] \to \mathbb{R},\ t \mapsto t^n$, $n \in \mathbb{N}_0$

Annahme: $\{ f_n \mid n \in \mathbb{N}_0 \}$ lin abh.

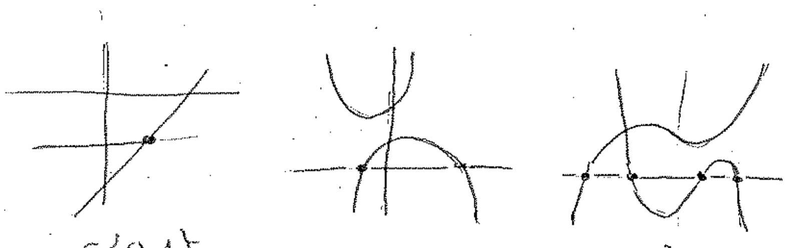
Offenbar sind wegen $f_m(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2^m} \neq \frac{1}{2^n} = f_n(\frac{1}{2})$ für $m \neq n$ die Funktionen $f_0, f_1, f_2, \ldots$ pw versch.

Nach (7.7) ex $r \in \mathbb{N}$ und $a_0, a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{R}$ mit $a_r \neq 0$, so daß

$$f = \sum_{i=0}^{r} a_i f_i : [0,1] \to \mathbb{R},\ t \mapsto \sum_{i=0}^{r} a_i t^i$$

die Nullfunktion ist.

Wir überlegen uns später, daß ein Polynom $\sum_{i=0}^{r} a_i X^i$ vom Grad r höchstens r Nullstellen besitzt. W



$r \in \{0,1\}$ $r = 2$ $r = 3$